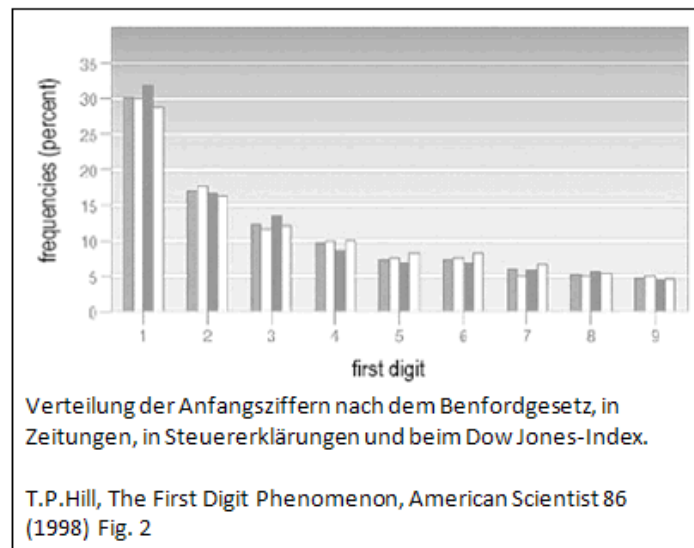


Abitur 2011 Mathematik LK Stochastik Aufgabe C2

Wenn man bei manchen Zahlenmengen z.B. Einwohnerzahlen oder Zahlen aus der Zeitung, die Anfangsziffern betrachtet, dann stellt man fest, dass viel mehr eine 1 als Anfangsziffer haben als eine 9. Der amerikanische Physiker Benford hat diesen Sachverhalt untersucht. Er fand heraus: Die Wahrscheinlichkeit $P(k)$, dass in einer solchen Zahlenmenge eine Zahl mit der Ziffer k beginnt berechnet sich nach dem sogenannten Benfordgesetz:

$$P(k) = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right).$$



Gegeben ist die Tabelle (gerundet auf 2 Nachkommastellen):

Anfangsziffer k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wahrscheinlichkeit $P(k)$	0,30	0,18	0,12	0,10	0,08	0,07			

Teilaufgabe 1.1 (11 BE)

Berechnen Sie die fehlende Wahrscheinlichkeitswerte so, dass $P(k)$ für $1 \leq k \leq 9$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Teilaufgabe 1.2

Aus einer Zahlenmenge, die dem Benfordgesetz genügt, wird eine 100-elementige Zufallsstichprobe gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Zahlen mit der Anfangsziffer 1

A: dem Erwartungswert entspricht.

B: innerhalb einer σ -Umgebung (σ =Standardabweichung) um den Erwartungswert liegt.

Die Verteilung der Anfangsziffern bei Zahlenangaben wird zum Beispiel auch von Wirtschaftsprüfern überprüft, wenn sie die Vermutung haben, dass eine Bilanz gefälscht sein könnte. In der Regel treten die Zahlen mit der Anfangsziffer 1 in gefälschten Bilanzen seltener auf als es nach dem Benfordschen Gesetz der Fall sein müsste.

Teilaufgabe 2.1 (14 BE)

Entwickeln Sie einen Signifikanztest mit einer Zufallsstichprobe von 100 Zahlen und einem Signifikanzniveau von 5%.

[Zur Kontrolle: kritischer Wert $k = 22$]

Beschreiben Sie, was die Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang bedeuten.

Teilaufgabe 2.2

Gehen Sie nun von Bilanzfälschungen aus, bei denen nur jede 5. Zahl die Anfangsziffer 1 hat.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine solche Fälschung bei dem von Ihnen in Aufgabe 2.1 entwickelten Test unentdeckt bleibt.

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gefälschte Bilanz unentdeckt bleibt, empfinden die Bilanzprüfer bei dem durchgeführten Test als zu hoch. Erläutern und begründen Sie ohne Rechnung, wie das Testverfahren geändert werden kann, so dass mehr Bilanzfälscher erwischt werden.