Abitur 2011 Mathematik GK Infinitesimalrechnung Aufgabe A2

Die nachträgliche Auswertung der Aufzeichnungen des Höhenbarometers eines Heißluftballons ergab, dass sich die Höhe des Ballons über dem Startpunkt der Ballonfahrt durch die Funktion h mit der Gleichung $h(t) = -0,5t^3 + 2t^2 + t$ beschreiben lässt.

t: Zeit in Stunden
$h(t)$: Höhe in 100 Metern
Der Ballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $h = 0$.

Teilaufgabe 1.1 (22 BE)

Berechnen Sie die Dauer der Ballonfahrt sowie die größte erreichte Höhe unter der Annahme, dass der Ballon eine ebene Landschaft überfliegt.
Geben Sie einen für den Sachverhalt sinnvollen Definitionsbereich an.

Teilaufgabe 1.2

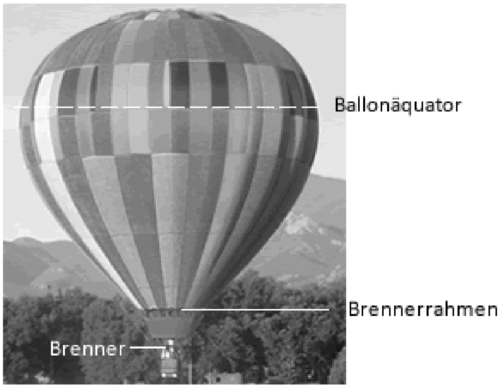
Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von h und deuten Sie diesen im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 1.3

Skizzieren Sie den Graphen von h (Höhenprofil der Ballonfahrt).

Die Ballonhülle eines Heißluftballons wird durch horizontale und vertikale Lastbänder, die in die Hülle eingenäht sind, stabilisiert. Die horizontalen Lastbänder verlaufen wie Fassringe rund um die Hülle. Die vertikalen Lastbänder laufen vom höchsten Punkt des Ballons seitlich herab bis zum runden Brennerrahmen, der oberhalb der Austrittsdüse des Brenners sitzt (siehe Material 1). Am Ballonäquator ist der Umfang des Ballons maximal.

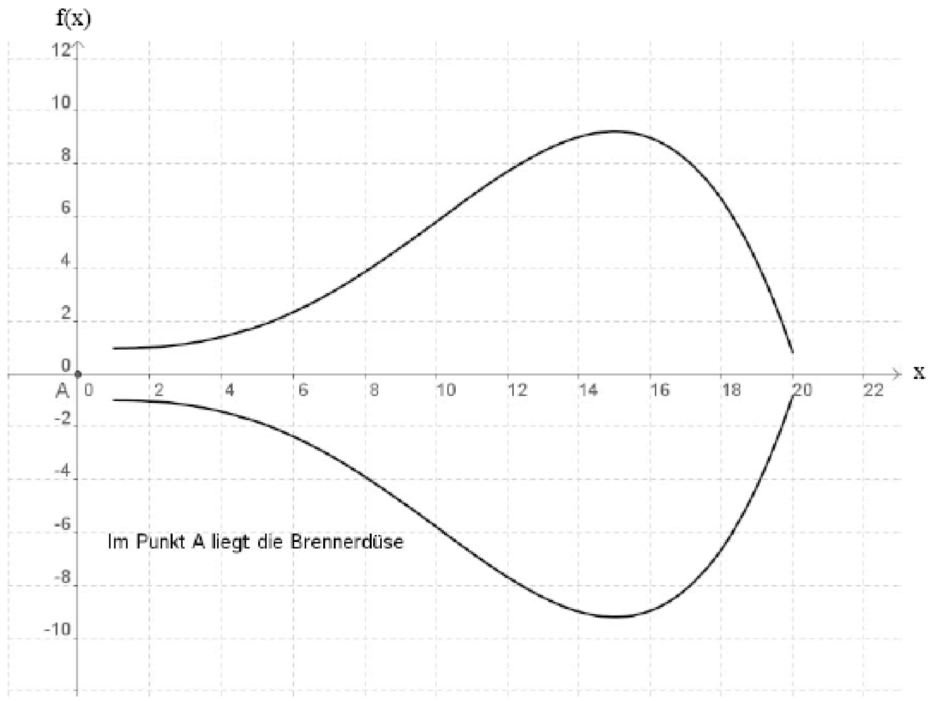
Material 1



Teilaufgabe 2.1 (18 BE)

Die Funktionen f_1 mit der Gleichung $f_1(x) = \frac{1}{2000} \cdot x^4 - \frac{1}{100} \cdot x^3 - \frac{1}{1000} \cdot x^2 + \frac{3}{100} \cdot x - 1$ und f_2 mit der Gleichung $f_2(x) = -\frac{1}{2000} \cdot x^4 + \frac{1}{100} \cdot x^3 + \frac{1}{1000} \cdot x^2 - \frac{3}{100} \cdot x + 1$ stellen den Umriss des Heißluftballons hinreichend genau dar (siehe Material 2).
Ordnen Sie die Graphen in Material 2 den Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu. Begründen Sie ihre Entscheidung.

Material 2



Teilaufgabe 2.2

Begründen Sie an einem wesentlichen Gesichtspunkt, warum die Graphen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die reale Ballonhülle nicht optimal beschreiben.

Teilaufgabe 2.3

Bestimmen Sie die Ableitung von $f_1(x)$ und zeigen Sie, dass auch
$f_1'(x) = \frac{1}{500} \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-15)$ gilt.

Teilaufgabe 2.4

Berechnen Sie die Länge des horizontalen Lastbandes am Ballonäquator.

Teilaufgabe 2.5

Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Gleichung im Sachzusammenhang und beschreiben Sie die zur Berechnung notwendigen Schritte.

$$\pi \cdot \int_{1}^{20} \left(\frac{1}{2000} \cdot x^4 - \frac{1}{100} \cdot x^3 - \frac{1}{1000} \cdot x^2 + \frac{3}{100} \cdot x - 1 \right)^2 d\,x = 2033,9$$