Abitur 2011 Mathematik GK Infinitesimalrechnung Aufgabe A1

Lässt man heißen Kaffee eine Zeit lang stehen, kühlt sich der Kaffee bis auf die Umgebungstemperatur ab. Die Abkühlung geschieht nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz:

$$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-k\,t} + T_U$$

Dabei bedeutet:

$T(t)$: Temperatur des Kaffees (in °C) nach t Minuten,
t: Zeit (in Minuten),
T_0: Temperatur des Kaffees (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$,
T_U: Umgebungstemperatur (in °C),
k: Abkühlungsfaktor, von Material und Oberflächenbeschaffenheit des Behälters abhängige Konstante (in 1/min)

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Die Anfangstemperatur des Kaffees in einer Tasse sei 80° C, die Raumtemperatur 21° C und der Abkühlungsfaktor $0{,}13$.
Weisen Sie nach, dass die Temperatur des Kaffees nach 10 Minuten $37{,}1^\circ$ C beträgt, und berechnen Sie die Temperatur des Kaffees nach 2 und nach 5 Minuten. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion T in dem Intervall $[0; 30]$.

Teilaufgabe 1.2

Man verbrüht sich nicht, wenn die Temperatur des Kaffees unter 45° C gesunken ist. Ermitteln Sie ohne Rechnung anhand einer geeigneten Skizze die Wartezeit, bis der Kaffee eine geringere Temperatur als 45° C hat.

In einem Becher kühlt der Kaffee etwas langsamer ab. Seine Temperatur T verändert sich nach folgender Gleichung: $T(t) = 59 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 21$. (Diese gilt für die Aufgaben 2.1, 3.1 und 3.2 sowie 4.)

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Berechnen Sie, wie lange man jetzt mindestens warten muss, um den Kaffee ohne Verbrühungsgefahr trinken zu können.

Teilaufgabe 2.2

In einem anderen Becher wird bei sonst unveränderten Bedingungen schon nach genau 3 Minuten die Temperatur von 45° C unterschritten. Bestimmen Sie den Abkühlungsfaktor für diesen Becher.

Teilaufgabe 3.1 (17 BE)

Berechnen Sie die Abkühlgeschwindigkeit für $t = 0$. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Abkühlungsgeschwindigkeit halb so groß ist wie für $t = 0$.

Teilaufgabe 3.2

Newton hat sein Abkühlungsgesetz auch in folgender Form angegeben: $T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_U)$
Zeigen Sie, dass diese Gleichung für die Abkühlungsfunktion des Kaffeebechers gilt.

Teilaufgabe 3.3

Die Abkühlungsgeschwindigkeit in einem besonderen (sehr gut isolierten) Gefäß, das in demselben Raum steht, wird durch folgende Funktion beschrieben: $A(t) = -0,69 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Ermitteln Sie die zugehörige Abkühlungsfunktion und die Anfangstemperatur.

Teilaufgabe 4. (6 BE)

Berechnen Sie unter Angabe einer Stammfunktion das Integral $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt$ für $t_2 = 15$ und $t_1 = 5$.
Deuten Sie das Integral im Sachzusammenhang.