

Abitur 2011 Mathematik GK Geometrie Aufgabe B2

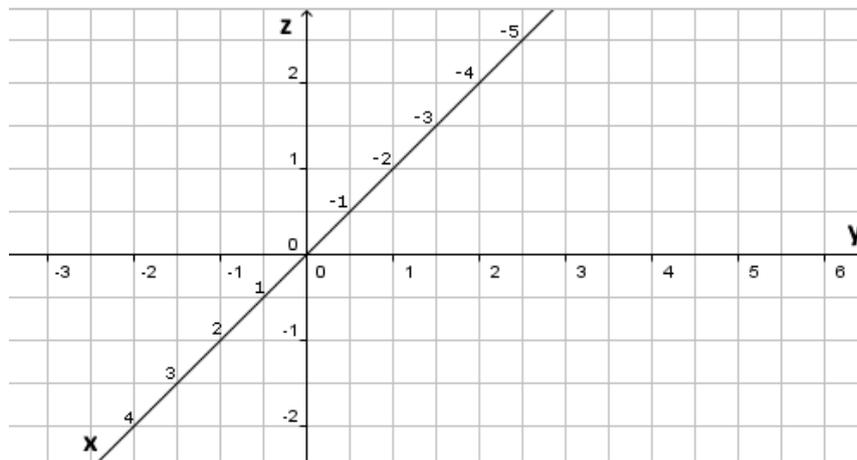
An einem Berg gibt es einen Hang, der sich annähernd durch eine Dreiecksfläche beschreiben lässt. In ein Koordinatensystem übertragen liegt die Spitze dieses Hanges im Punkt $P(0|0|2,5)$. Die beiden Eckpunkte am Fuß des Berges sind $Q(4|0|0)$ und $R(2|5|0)$. Die Koordinaten geben dabei die Entfernungen in x -, y - und z -Richtung in 100 m an.

Teilaufgabe 1.1 (14 BE)

Zeichnen Sie die Punkte und der Hang in das vorgegebene Koordinatensystem (Material 1) und ermitteln Sie eine Parameter- sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der der Hang liegt.

[Mögliches Ergebnis: $E : 2,5x + y + 4z = 10$]

Material 1



Teilaufgabe 1.2

Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal zu der Ebene E steht.

Teilaufgabe 1.3

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren \vec{n} und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie das Ergebnis bezogen auf die Ebene E .

Vom Tal aus soll eine Zahnradschiene aus Aluminium für ein Transportsystem zur Spitze des Hangs gebaut werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Zahnradschiene geradlinig und parallel über der Hangfläche verläuft. Der Anfang der Zahnradschiene im Tal liegt in der Talsstation im Punkt $T(3|t|0,005)$. Auf der Spitze des Hangs wird im Punkt P ein 0,5 m hoher, zur x - y -Ebene senkrechter Mast errichtet, an dessen Spitze S die Zahnradschiene endet.

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Bestimmen Sie den fehlenden Wert t sowie die Gleichung der Geraden g , die den Verlauf der Zahnradschiene beschreibt.

[Mögliche Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$]

Teilaufgabe 2.2

Berechnen Sie die Masse der gesamten Zahnradschiene, wenn ein Meter Schiene eine Masse von 27,1 kg hat.

Zum Abstützen der Zahnradschiene müssen in gleichmäßigen Abständen lotrechte Stützmasten angebracht werden, u.a. eine Stütze, deren Spitze die Zahnradschiene im Punkt $U(1,8|1,5|1,005)$ berührt.

Da der Boden unmittelbar unter diesem Punkt zu weich ist, werden seitlich versetzt zwei schräge Stützen links und rechts von der Zahnradschiene in den Punkten $Q_1(1,8018|1,4995|0,999)$, der in der Hangebene liegt, und Q_2 gebaut.

Teilaufgabe 3.1 (8 BE)

Zeigen Sie, dass der Punkt Q_1 in der Hangebene E liegt.

Teilaufgabe 3.2

Erklären Sie die Bedeutung der Zeilen (1) bis (4) im Sachzusammenhang.

$$(1) S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,5 \\ 1,005 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \iff 5x - 6y = 0$$

$$(2) h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,8018 \\ 1,4995 \\ 0,999 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$(3) 5(1,8018 + 5t) - 6(1,4995 - 6t) = 0 \iff t = -\frac{3}{15250}$$
$$\Rightarrow D(1,8008|1,5007|0,999)$$

$$(4) t^* = 2 \cdot \left(-\frac{3}{15250}\right) = -\frac{3}{7625}$$

$$\Rightarrow \text{in } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,8018 \\ 1,4995 \\ 0,999 \end{pmatrix} - \frac{3}{7625} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7998 \\ 1,5019 \\ 0,999 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_2(1,7998|1,5019|0,999)$$