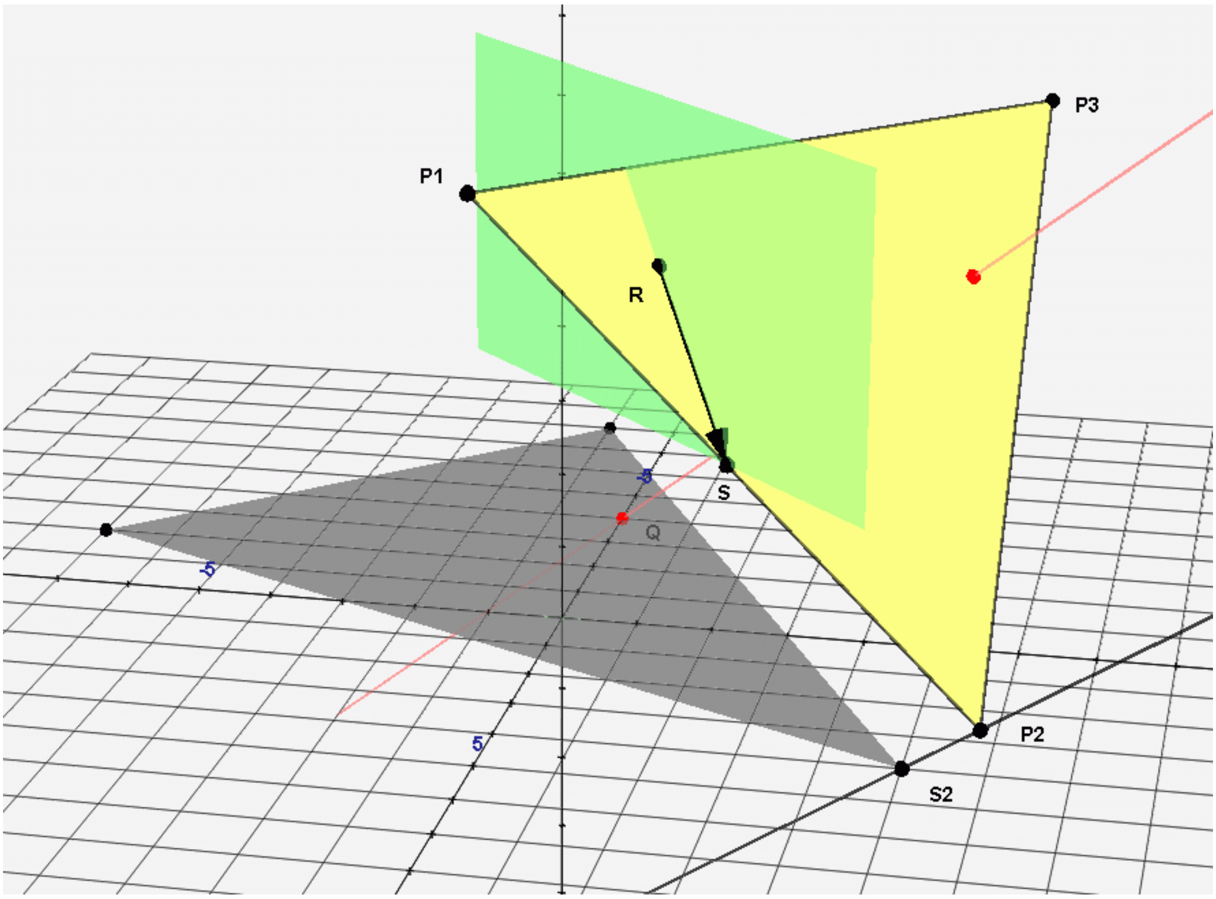
Aufgabe B1 Landesabitur Hessen 2011 LK

Die folgende Skizze gibt einen Überblick über alle in der Aufgabe gestellten Anforderungen:



Zunächst sollte ein Sonnensegel (gelb) in ein Koordinatensystem so eingezeichnet werden, dass der räumliche Eindruck erkennbar ist. Das Sonnensegel hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks (nachprüfen). Danach war zu zeigen, dass der Punkt Q (rot) innerhalb des Segelschattens (grau) liegt. Im letzten Teil der Aufgabe geht es um einen Ball R, der auf das Sonnensegel fällt, das Segel hinunterrollt und im Punkt S das Sonnensegel wieder verlässt. Dieser Punkt S ist zu berechnen, wenn man weiß, dass der Weg des Balles durch die grüne und gelbe Ebene festgelegt ist. Eine Beschreibung der grünen Ebene ist aus dem Aufgabentext zu entnehmen.

Aufgabe 1. (8 BE)

Zeichnung und Gleichung der Ebene in Normalenform:

Der räumliche Eindruck wurde durch die Schattierung der Ebene erzeugt, da die Achsen an den entsprechenden Stellen vom gelben Sonnensegel abgedeckt werden. Zur Herleitung der Normalenform bieten sich mehrere Wege an. Hier benützen wir die Berechnung eines Normalenvektors $\overrightarrow{n_1}$ der Ebene (P1 P2 P3) über das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5-5 \\ 6-0 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 6-0 \\ 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_1} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Statt $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}$ können wir auch den dazu kollinearen Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwenden.

Da P1 (5 | 0 | 7) ein Punkt der Ebene ist, gilt für die Normalenform $E : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Nicht verlangt, aber einfach herzuleiten ist die dazugehörige Koordinatenform

$$x + y + z - 12 = 0 .$$

Aufgabe 2. (2 BE)

Eine einfache Rechnung zeigt $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| = \sqrt{72}$

Aufgabe 3. (9 BE)

Hier bieten sich auch wieder mehrere Wege an. Wir entscheiden uns hier für den Nachweis, dass der Punkt Q innerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten S1, S2 und S3 liegt, wobei S1, S2 und S3 die Projektionen der Eckpunkte des Sonnensegels in die Schattenebene (hier die x-y- Ebene) sind. Stellvertretende Rechnung für den Punkt S2 (siehe Zeichnung):

Die Terrassenebene (x-y-Ebene) hat die Gleichung z = 0.

Die Gerade durch den Punkt P2 besitzt die Gleichung

$$k \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, dabei gibt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen an.

Wegen z = 0 muss 1 + r = 0 gelten. Daraus folgt r = -1.

Setzt man den Parameter r in die Geradengleichung von k ein, erhält man die Koordinaten von S2 (4| 5| 0).

Mit einer analogen Rechnung findet man die weiteren Eckpunkte des Schattens, nämlich

S1 (-2 | -7 | 0) (Parameter r = -7) und

S3 (-8 | -1 | 0) (Parameter r = -7)

In der Musterlösung des hess. Kultusministeriums war an dieser Stelle der zeichnerische Nachweis (siehe Skizze, Punkt Q liegt tatsächlich innerhalb des grau gezeichneten Schattens) ausreichend.

Zum Training ist aber eine rechnerische Überprüfung sinnvoll.

Das Schattendreieck liegt in der Schattenebene Esch, die durch die drei Punkte S1, S2 und S3 festgelegt wird. Parameterdarstellung dieser Ebene ist:

$$E_{Sch} \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da Q ein Punkt dieser Ebene ist, muss gelten :

$$\begin{aligned} -2 + 6r - 6s &= -4 \qquad (1) \\ -7 + 12r + 6s &= 0 \qquad (2) \\ 0 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) und (2) folgt durch Additionsverfahren

$$
\begin{aligned}
-9+18r &= -4 \\
18r &= 5 \\
r &= \frac{5}{18} \qquad \text{und} \\
-7+12\cdot\frac{5}{18}+6s &= 0 \\
-7+\frac{10}{3}+6s &= 0 \\
6s &= \frac{11}{3} \\
s &= \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

da $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$ und $0 \le r+s \le 1$ gilt, liegt der Punkt Q innerhalb des Schattendreiecks.

Aufgabe 4. (11 BE)

Für die genannte Ebene F gilt $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (grün gezeichnet)

Für die Ebene E gilt : $x + y + z = 12$.

Der gesuchte Vektor $\vec{v}$ ist der Richtungsvektor der Schnittgeraden g von E und F.

Durch Einsetzen erhält man :

$$(4+r)+(2+r)+(6+r+s) = 12$$

$$s = -3r \quad \text{das heißt für}$$

$$\text{die Gerade} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

S ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der Geraden h durch die Eckpunkte P1 und P2 des Dreiecks.

Mit $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$g \cap h: \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{aligned} 4+r &= 5 \\ 2+r &= 6s \\ 6-2r &= 7-6s \end{aligned}$$

das Ergebnis dieses lGS mit 2 Variablen ist r =1 und s = 0,5

Damit hat S die Koordinaten S (5 | 3 | 4) und der Punkt in dem der Softball vom Segel herunterfällt, ist gefunden.