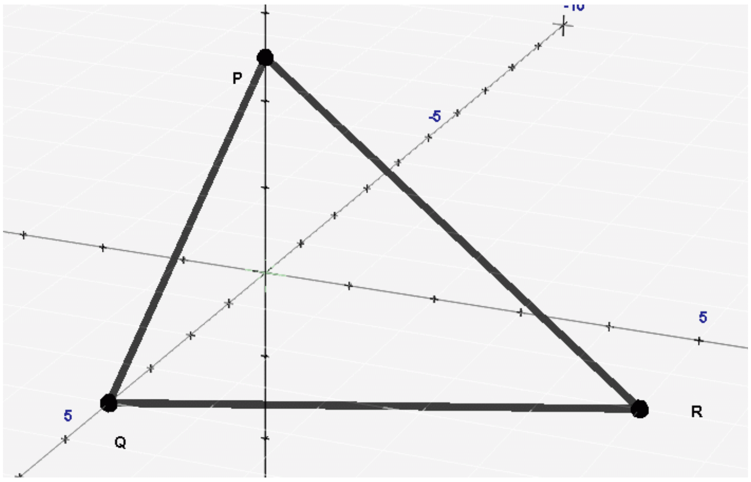
Aufgabe B2 Landesabitur Hessen 2011 GK

Aufgabe 1.1. (8 BE)

Aufstellung der Parametergleichung :



$$E_{PQR} \quad \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \overrightarrow{QP} + s \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-0 \\ 2,5-0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-4 \\ 5-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufstellung der Koordinatengleichung :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Parameterform liefert 3 Gleichungen

$$x = 4 - 4r - 2s$$

$$y = 0 + 5s \longrightarrow s = 0,2 \cdot y$$

$$z = 0 + 2,5r \longrightarrow r = 0,4 \cdot z$$

Mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens kommt man schnell auf die Koordinatendarstellung:

$$x = 4 - 4 \cdot 0,4z - 2 \cdot 0,2y$$

$$x = 4 - 1,6z - 0,4y$$

$$x + 0,4y + 1,6z = 4 \ | \cdot 2,5$$

$$2,5x + y + 4z = 10$$

Aufgabe 1.2 (2 BE)

Es ist zu zeigen, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht auf beiden Richtungsvektoren der Ebene steht. Diese Überprüfung geschieht am einfachsten mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 2,5 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2,5 = 10 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \perp E_{PQR}$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,5 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = (-5) + 5 = 0$$

Aufgabe 1.3 (4 BE)

Winkel zwischen den Vektoren.

Die Berechnung eines Winkels geschieht mit der Formel

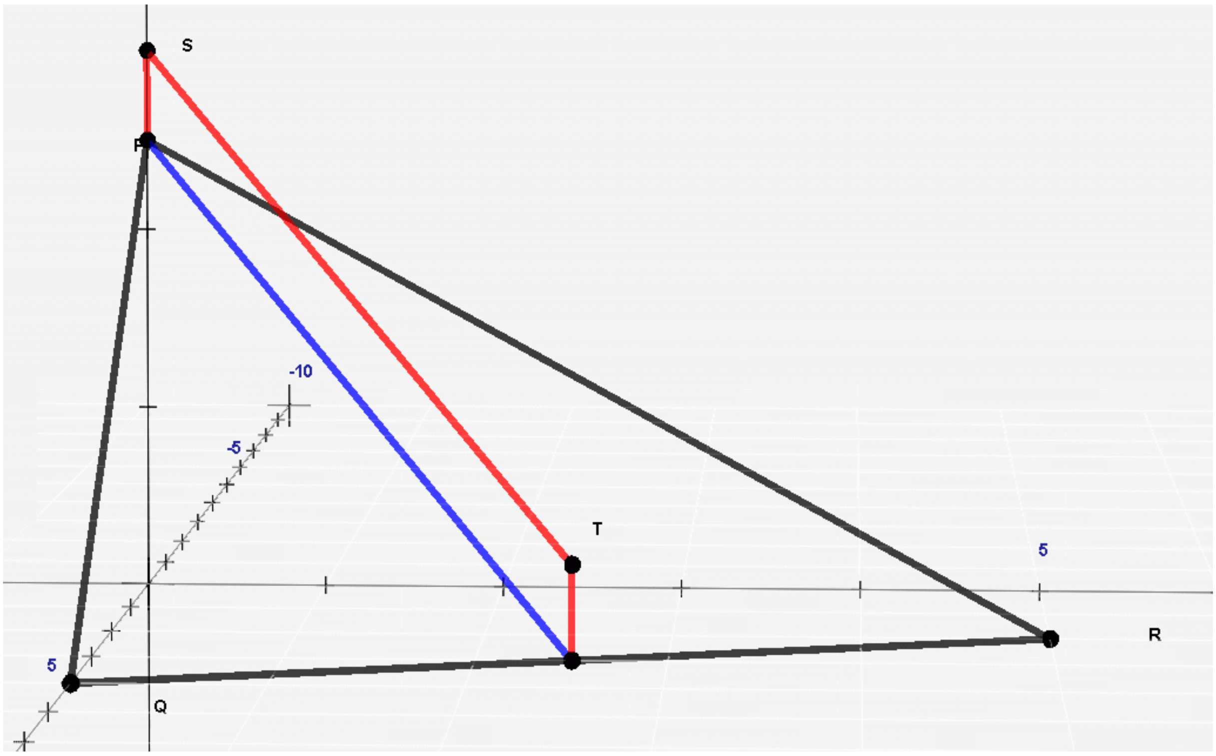
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2,5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{2,5^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{23,25}} \longrightarrow \alpha = 33,95°$$

Der Winkel α beschreibt den Steigungswinkel der Ebene E gegenüber der Horizontalebene (x-y-Ebene)

Aufgabe 2.1 (4 BE)

Skizze :



Die rote Strecke zeigt den Verlauf der Zahnradschiene (im Vergleich zur Ebene überhöht gezeichnet). Die Pfosten haben in der Realität eine Höhe von 0,5 m. Die Bahnlinie verläuft geradlinig und parallel zur Hangfläche. Daraus ergeben sich die Punkte *S* und *T* zu

$S = (0 \mid 0 \mid 2{,}5005)$ und $T (3 \mid t \mid 0{,}005)$, $t \in \mathbb{R}$

0,5 m entsprechen dabei $0{,}5 : 100 = 0{,}005$ Längeneinheiten

Berechnung des Parameters t :

Die Gerade von S nach T hat den Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-t \\ 2{,}505-0{,}005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -t \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Dieser Richtungsvektor verläuft hangparallel, also senkrecht zum Normalenvektor der Ebene.

Daraus folgt für das Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -t \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3) \cdot 2{,}5 + (-t) \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2{,}5 - t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2{,}5$$

Die Koordinaten des Punktes T lauten damit vollständig T (3 | 2,5 | 0,005).

Aufgabe 2.2 (4 BE)

Aus *S* und *T* kann die Gerade *g*, die den Verlauf der Schiene beschreibt, hergeleitet werden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + r^{*} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aus *S* und *T* kann auch die Länge der Bahn sowie ihr Gewicht berechet werden:

$$\left|\overrightarrow{ST}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 2,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{21,5} \approx 4,637 \text{ Längeneinheiten}$$

1 Längeneinheit entspricht 100 m, d.h. die Bahn hat eine Länge von 463,7 m .

Da ein Meter der Schiene 27,1 kg wiegt, ergibt sich die Masse der gesamten Zahnradschiene zu 12 566, 7 kg.

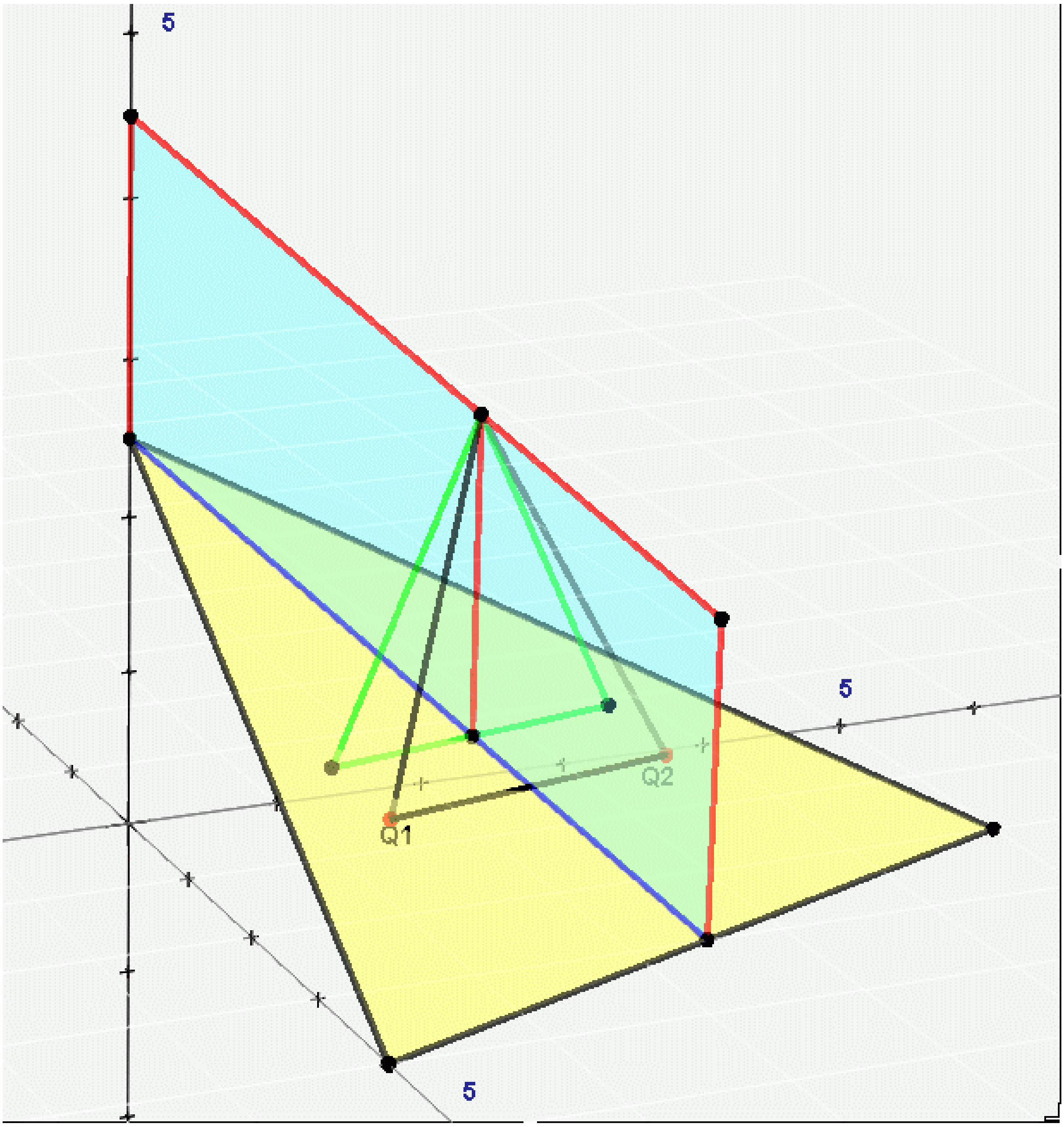
Aufgabe 3.1 (2 BE)

Der Punkt Q_1 liegt in der Ebene E, denn für Q_1 (1,8018 | 1,4995 | 0,999) und $E: \; 2,5x + y + 4z = 10$ gilt:

$$2,5 \cdot 1,8018 + 1,4995 + 4 \cdot 0,999 = 10 \quad \text{(Punktprobe)}$$

Aufgabe 3.2   (6 BE)

Bei dieser Aufgabe ist nichts zu rechnen. Vielmehr wird erwartet, die 4 Rechenschritte in den Zeilen (1) bis (4) zu erklären und im Sachzusammenhang einzuordnen. Zur besseren Veranschaulichung ist eine weitere stark überhöhte Skizze beigefügt.



In Zeile (1) steht die Ebenengleichung einer Ebene S in Parameter- und Koordinatenform.

Diese Ebene (zyanblau) enthält (siehe Parameterform) den Punkt U, den Richtungsvektor vom Lot zu U bzgl. der x-y-Ebene (Richtung der Masten) und den Richtungsvektor von g (Zahnradschiene).

Zeile (2) beschreibt eine Gerade h durch den gegebenen Punkt Q_1 senkrecht zur Ebene S

In Zeile (3) wird der Durchstoßpunkt D der Geraden h durch die Ebene S berechnet.

Die letzte Zeile zeigt ein Verfahren zur Berechnung des Spiegelpunktes Q_2 von Q_1 bei orthogonaler Spiegelung am Durchstoßpunkt D.

Die Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ verbindet die Fußpunkte der beiden schrägen Stützen, die links und rechts des Pfeilers durch U zur Sicherung der Schienenanlage eingebaut werden (grün).

