Abitur 2010 Mathematik GK Geometrie Aufgabe B2

Gegeben sind die Punkte $A(3|-2|4)$, $B(5|2|0)$, $C(1|6|2)$ und $E(8|5|9)$.

Teilaufgabe 1. (10 BE)

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass die Punkte A, B, C und D ein Quadrat bilden, und stellen Sie das Quadrat $ABCD$ und den Punkt E in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

Teilaufgabe 2. (7 BE)

Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene F an, in der das Viereck $ABCD$ liegt, und ermitteln Sie eine zugehörige Koordinatengleichung.
(Mögliches Ergebnis: $F: 2x + y + 2z = 12$)

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene H, die senkrecht auf F steht.

Teilaufgabe 4. (8 BE)

Erklären Sie die folgende Rechnung und deuten Sie das Endergebnis (vgl. mit der Zeichnung aus Aufgabe 1).

1. Gesucht wird die Gerade g mit dem Stützvektor $\overrightarrow{e}$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{n}$, für den folgende zwei Bedingungen I) und II) gelten:

   I) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ II) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{n} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

   $\Rightarrow \quad g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Gesucht wird der Punkt L auf der Geraden mit folgender Bedingung für t:
   $2 \cdot (8 + 4t) + 1 \cdot (5 + 2t) + 2 \cdot (9 + 4t) = 12$
   $\Rightarrow t = -1,5 \Rightarrow L(2|2|3)$

3. Bestimmung des Endergebnisses:
   $V = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{LE}| = \underline{\underline{108}}$