Aufgabe A1 Landesabitur Hessen 2008 GK

1. $h(x)=\frac{c}{x}$

- Es gilt $h(14)=\frac{c}{14}=4\Rightarrow c=56$ ➔
- $h(25)=\frac{56}{25}=2{,}24$ ➔ Der Durchmesser der Flaschenöffnung ist *d*=4,48cm
- $h'(x)=-\frac{56}{x^2}$ ➔ Steigung von *h* in *K* ist $m=h'(14)=-\frac{56}{14^2}\approx-0{,}2857$ ➔
  $\alpha=\arctan(m)\approx-15{,}95^0$

2.1. $V_1=\pi\cdot4^2\cdot14$ und

$$V_2=\pi\int_{14}^{25}\left(\frac{56}{x}\right)^2dx=56^2\pi\int_{14}^{25}\frac{1}{x^2}dx=56^2\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{14}^{25}=56^2\pi\left(-\frac{1}{25}+\frac{1}{14}\right)$$

➔ $V=V_1+V_2=\pi(224+98{,}56)\approx1013\,\text{cm}^3$

Auf der Flasche wird wohl 1Liter stehen

2.2. Es muss $V=V_1+V_3=\pi\left(224+56^2\cdot\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{14}\right)\right)=1250$ gelten ➔

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{14}=\frac{1250}{56^2\pi}-\frac{224}{56^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}=\frac{1250}{56^2\pi}-\frac{224}{56^2}-\frac{1}{14}\approx-0{,}016$$

➔ *x*=62,5cm ist die neue Gesamthöhe der Flasche

3. $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ mit den Eigenschaften

(1) $f(0)=a_0=4$, da $L(0|4)$ Punkt des Graphen von *f* ist

(2) $f(7)=343a_3+49a_2+7a_1+4=4\Rightarrow343a_3+49a_2+7a_1=0$, da $M(7|4)$ Punkt des Graphen von *f* ist

(3) $f(14)=2744a_3+196a_2+14a_1+4=4\Rightarrow2744a_3+196a_2+14a_1=0$, da $K(14|4)$ Punkt des Graphen von *f* ist

(4) $f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$ und $h'(x)=-\frac{56}{x^2}$ ➔

f'(14)=*h'*(14) ⇔ $588a_3+28a_2+a_1=-\frac{56}{196}$, weil die Steigungen von *h* und *f* in *K* identisch sein müssen

4. Das Rotationsvolumen $V_4 = \pi\int_0^{14} f^2(x)dx > \pi\int_0^{14} 4^2\,dx = V_z$, weil zu jedem $7 \le r \le 14$ mit $f(r) = f(7+d) \ge 4$ gibt es zwar genau ein $0 \le r' \le 7$ mit $f(r') = f(7-d) \le 4$ aber wegen der Symmetrie in *M* gilt:

$f(7+d) - 4 = 4 - f(7-d) \Leftrightarrow f(7+d) = 8 - f(7-d) \quad \Rightarrow$
$f^2(7+d) = \left(8 - f(7-d)\right)^2$

Nun ist aber für $0 < d < 7$

$$\frac{f^2(7+d) + f^2(7-d)}{2} > 4^2 \Leftrightarrow 32 - 8f(x-d) + f^2(7-d) > 16$$
$$\Leftrightarrow \quad 32 - 8f(x-d) + f^2(7-d) > 16 \Leftrightarrow 16 - 8f(x-d) + f^2(7-d) > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (4 - f(x-d)) \quad > 0$$

d.h der Mittelwert der Quadrate entsprechender Radien sind größer als 4², also ist das Rotationsvolumen $\pi\int_0^{14} f^2(x)dx > \pi 4^2$, also wird das Volumen der Flasche größer.