Abitur 2011
Leistungskurs Mathematik
V Analytische Geometrie
Musterlösung

1. A(1|-6|2), B(10|30|11) und Gerade g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) (1) A $\in$ g: $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ==> $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{==>}\ \lambda = -2 \\ \text{==>}\ \lambda = -2 \\ \text{==>}\ \lambda = -2 \end{matrix}$ ==> A $\in$ g

(2) B $\in$ g: $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ==> $\begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 11 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{==>}\ \lambda = -11 \\ \text{==>}\ \lambda = 7 \\ \text{==>}\ \lambda = -11 \end{matrix}$ ==> Widerspruch B $\notin$ g

b) (1) Ebene E^P(B;g): $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 11 \end{pmatrix} \Bigg\| \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ -72 \end{pmatrix} = 72 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

E^N: $\vec{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$ oder $x_1 - x_3 = -1$

(2) Lage im Koordinatensystem: E parallel zur x_2 – Achse oder E steht senkrecht zur x_1x_3-Ebene

c) (1) C $\in$ g ==> C($(-1-\lambda \mid 2+4\lambda \mid -\lambda)$

(2) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-\lambda-10 \\ 2+4\lambda-30 \\ -\lambda-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda-11 \\ 4\lambda-28 \\ -\lambda-11 \end{pmatrix}$

==> $\overline{BC} = \sqrt{18\lambda^2 + (22-224+22)\lambda + 1026} = \sqrt{18\lambda^2 - 180\lambda + 1026}$

(3) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 36 \\ 9 \end{pmatrix}$ ==> $\overline{AB} = \sqrt{1458}$

(4) gleichschenkliges Dreieck ABC mit Basis [AC]:

$$\overline{BC} = \overline{AB}$$

$$\sqrt{18\lambda^2 - 180\lambda + 1026} = \sqrt{1458} \quad |^2$$

$$18\lambda^2 - 180\lambda + 1026 = 1458$$

$\lambda^2 - 10\lambda - 24 = 0$ ==> $\lambda_1 = 12$ ==> $C(-13 \mid 50 \mid -12)$

$\lambda_1 = -2$ ==> $C(1 \mid -6 \mid 2) = A$

(5) Flächeninhalt:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \text{x} \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1008 \\ 0 \\ 1008 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 1008 \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 504\sqrt{2} \text{ FE}$$

oder: (5) $\vec{M}_{AB} = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 22 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = 8 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3 \cdot 8 = 24$$

==> $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1378} \cdot 24 = 504\sqrt{2}$ FE

oder (1) Abstand von B zur Geraden g: $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 11 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

==> $9 + 18\lambda - 99 = 0$ ==> $\lambda = 5$ ==> Lotfußpunkt F(-6|22|-5)

(2) $\vec{C} = \vec{F} \pm \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 22 \\ -5 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 7 \\ -28 \\ 7 \end{pmatrix}$ ==> C_1(1 | -6|2) bzw. C_2(-13|50|-12)

d) (1) Thaleskreis: U liegt auf dem Mittelpunkt von [AB] mit Winkel $\gamma = 90^0$

(2) für $\gamma < 90^0$ wandert U im Inneren nach oben

für $\gamma > 90^0$ wandert U im Äußeren nach unten

(3) Dreieck ABC: Winkel bei B $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BA}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} = \frac{\begin{pmatrix} -23 \\ 20 \\ -23 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -9 \\ -36 \\ -9 \end{pmatrix}}{27\sqrt{2} \cdot 27\sqrt{2}} = \frac{-306}{27^2 \cdot 2}$

==> $\beta = 102{,}12^0$ also liegt U außerhalb

e) (1) $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ ==> $h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot 1344}{504\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ LE

(2) Alle Spitzen liegen auf Ebenen parallel zur Ebene E des Dreiecks ABC im Abstand $4\sqrt{2}$:

==> $\frac{\vec{X} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1}{\sqrt{2}} = \pm 4\sqrt{2} \quad | * \sqrt{2}$

„+“: $-x_1 + x_3 - 1 = 8$ ==> E_1: $-x_1 + x_3 = 9$

„-“: $-x_1 + x_3 - 1 = -8$ ==> E_2: $-x_1 + x_3 = -7$

oder Erfassen von zwei „Spitzen“:

(1) $\vec{S}_{1,2} = \vec{A} \pm 4\sqrt{2}\vec{n}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ==> S_1(-3|-6|6) und S_2(5| -6|-
2)

(2) E_1: $\vec{x} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ==> $-x_1 + x_3 = 9$

E_2: $\vec{x} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ==> $-x_1 + x_3 = -7$

2. Ebenenschar: $H_t : \vec{x} \circ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = 0$

a) gemeinsame Schnittgerade:

(1) H_0: $x_2 = 0$ |*(-1)
H_1: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = 0$
$x_1 + x_3 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \mu \end{aligned} \quad \text{==> Schnittgerade } s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prüfen, ob in s in der Ebenenschar: $\mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$ ==> 0= 0, also s in H_t

2bα) g in H_t: g: $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = 0$ ==> $2-t+(4-2t)\lambda = 0$ ==> $\lambda = \frac{2-t}{4-2t} = 2$ für $t \neq 2$

==> für t = 2 liegt g in H_2

2bβ) Ebenen parallel, wenn: $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ==> $\begin{aligned} k &= -t \\ 1 &= 0 \\ k &= t \end{aligned}$ ==> Widerspruch, also nicht parallel

c) z.B. liegt der Punkt P(0|1|0) nicht in der Ebene H_t. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = 0$ <==> 1 = 0 Widerspruch

oder jeder Punkt der x_2 – Achse außer der Ursprung liegen nicht in H_t