$f_s(x) = e^{2x - \frac{1}{2} \cdot s \cdot x^2}$; s ∈ ℝ⁺ ; x ∈ ℝ

1a) Die Funktion im Exponenten ist wegen s ∈ ℝ⁺ stets eine nach unten geöffnete Parabel. **3**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{\overbrace{2x - \frac{1}{2} \cdot s \cdot x^2}^{\to -\infty}}}_{\to 0} = 0$$

oder:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{2x - \frac{1}{2} \cdot s \cdot x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\overbrace{\overset{\to \pm\infty}{\widehat{x}} \cdot \overbrace{\left(2 - \frac{1}{2} \cdot s \cdot x\right)}^{\to \mp\infty}}^{\to -\infty}} = 0$$

1b) $f_s(0) = e^0 = 1 \Rightarrow$ gemeinsamer Punkt $(0|1)$ für alle Schargraphen. **5**

Für $x \neq 0$ gilt folgende Umformung:

$$\begin{aligned} s_1 &> s_2 && \left| \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) < 0 \right. \\ -\frac{1}{2}s_1x^2 &< -\frac{1}{2}s_2x^2 && |+2x \\ 2x - \frac{1}{2}s_1x^2 &< 2x - \frac{1}{2}s_2x^2 && |e^{(\ldots)}\ (str.mon.st.) \\ f_{s_1}(x) &< f_{s_2}(x) \end{aligned}$$

Damit liegt für $s_1 > s_2$ bei $x \neq 0$ der Graph G_{s_1} stets **unterhalb** von G_{s_2}.

1c) $f_s'(x) = e^{2x - \frac{1}{2} \cdot s \cdot x^2} \cdot (2 - s \cdot x)$ **3**

$f_s'(0) = 1 \cdot 2 = 2$ unabhängig von s.

1d) $f_s'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 2 - s \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{s}$ **7**

Monotonie:

	$x <$	$\frac{2}{s}$	$< x$
$f_s'(x)$	> 0	0	< 0
G_{f_s}	str.m.st.	HoP	str.m.fa.

$f_s\left(\frac{2}{s}\right) = e^{\frac{4}{s} - \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{4}{s^2}} = e^{\frac{2}{s}} \Rightarrow HoP\left(\frac{2}{s}\middle|e^{\frac{2}{s}}\right)$

(I): $\frac{2}{s} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{s = 4}$; (II): $\frac{2}{s} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{s = 2}$; (III): $\frac{2}{s} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{s = 1}$

1e) $g(x) = 2x - \frac{1}{2} \cdot s \cdot x^2$ ist eine Parabel mit Scheitel bei $x = \frac{2}{s}$, somit achsensymm. zu $x = \frac{2}{s}$. **5**

Somit ist auch $f_s(x) = e^{g(x)}$ achsensymm. zu $x = \frac{2}{s}$.

oder: $f_s\left(x + \frac{2}{s}\right) = e^{2\left(x+\frac{2}{s}\right) - \frac{1}{2} \cdot s \cdot \left(x+\frac{2}{s}\right)^2} = e^{2x + \frac{4}{s} - \frac{1}{2}sx^2 - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{4x}{s}}^{=2x} - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{4}{s^2}}^{=\frac{2}{s}}} = e^{\frac{2}{s} - \frac{1}{2}sx^2}$

Diese Funktion ist gerade.

oder: Man zeigt durch Nachrechnen, dass gilt: $f_s\left(\frac{2}{s} - x\right) = f_s\left(\frac{2}{s} + x\right)$

Mit bestem Dank an Herrn Klement (Gymnasium Donauwörth)

2) $F(x) = \int_1^x f_2(t)dt = \int_1^x e^{2t-t^2}dt$ besitzt eine Nullstelle bei $x = 1$ (untere Grenze). Nach HDI gilt: $F'(x) = f_2(x) = e^{2x-x^2} > 0 \Rightarrow G_F$ str.mon.steigend für alle $x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = f_2'(x) = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)$ Das Krümmungsverhalten von G_F entspricht dem Monotonieverhalten von G_{f_2}. G_F ist somit gemäß 1d) linksgekrümmt für $x < 1$ und rechtsgekrümmt für $x > 1$. Weil G_{f_2} gemäß 1e) zu $x = 1$ achsensymmetrisch ist, ist G_F zu $(1\|0)$ punktsymmetrisch. $F'(1) = e^{2-1} = e \Rightarrow$ Wendetangente: $y = e \cdot (x-1) + 0 = e \cdot x - e$	**7**
3a) Je wirksamer das Gift ist, desto weniger stark wächst der Bakterienbestand. Wegen *1b)* ist dies für größere Werte von s der Fall. ⇒ Je wirksamer das Gift ist, desto größer ist s. $f_s(0) = 1$ *(1b)* und $HoP\left(\frac{2}{s}\middle\|e^{\frac{2}{s}}\right)$ *(1d)* ⇒ Ansatz: $\boldsymbol{e^{\frac{2}{s}} = 5} \Rightarrow \frac{2}{s} = \ln 5 \Rightarrow \boldsymbol{s = \frac{2}{\ln 5}}$	**4**
3b) $f_s''(x) = \left(e^{2x-\frac{1}{2}\cdot s\cdot x^2} \cdot (2 - s \cdot x)\right)' = e^{2x-\frac{1}{2}\cdot s\cdot x^2} \cdot (2 - s \cdot x)^2 - s \cdot e^{2x-\frac{1}{2}\cdot s\cdot x^2} =$ $= e^{2x-\frac{1}{2}\cdot s\cdot x^2} \cdot (4 - 4sx + s^2x^2 - s) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow s^2x^2 - 4sx + 4 - s = 0$ $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2s^2} \cdot \left(4s \pm \sqrt{16s^2 - 4s^2 \cdot (4-s)}\right) =$ $= \frac{1}{2s^2} \cdot \left(4s \pm \sqrt{4s^3}\right) = \frac{1}{2s^2} \cdot \left(4s \pm 2s\sqrt{s}\right) = \frac{2\pm\sqrt{s}}{s}$ Da der Zeitpunkt der stärksten Abnahme gesucht ist, muss $x > \frac{2}{s}$ sein, somit ist dies $\frac{2+\sqrt{s}}{s}$ Stunden nach Versuchsstart.	**6**
	40

Mit bestem Dank an Herrn Klement (Gymnasium Donauwörth)