

Lösung: Abitur GK M, 1988, VI

1. a) Es gibt viele verschiedene Wege:

i) einfacher Weg (mit Tabelle; gibt nur Näherungswerte):

$$P(E_1) = B(4; \frac{1}{3}; 1) \approx 0,39506; \quad P(E_2) = B(4; \frac{1}{3}; 2) \approx 0,29630$$

ii) genaues Ergebnis über die Bernoulli-Formel:

$$P(E_1) = B(4; \frac{1}{3}; 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81};$$

$$P(E_2) = B(4; \frac{1}{3}; 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

iii) genaues Ergebnis über Kombinatorik:

Versuch mit Zurücklegen:

$$\text{als Variation: } |\Omega| = 3^4 = 81; \quad \text{mit Zählprinzip: } |\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

E_1 : Für die 1 gibt es an jeder Stelle eine, für nicht 1 an jeder Stelle zwei Möglichkeiten.

Es gibt $\binom{4}{1}$ Möglichkeiten für die Position der 1.

$$\Rightarrow |E_1| = \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \quad \Rightarrow \quad P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{32}{81}$$

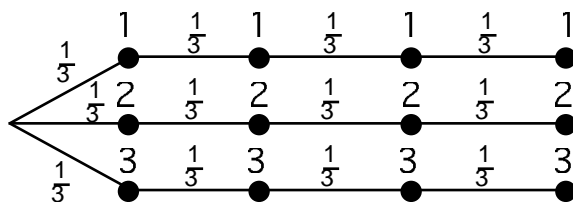
$$E_2: \text{entsprechend: } |E_2| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \quad \Rightarrow \quad P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

iv) mit Baumdiagramm (Weg wie in Teilaufgabe 1.a))

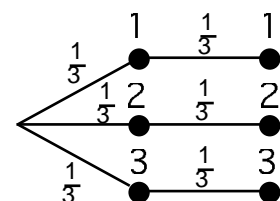
b) i) mit Ω aus Teilaufgabe 1. a): $F = \{(1; 1; 1; 1); (2; 2; 2; 2); (3; 3; 3; 3)\}; \Rightarrow |F| = 3$

$$\text{Zählprinzip: } |G| = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \quad \Rightarrow \quad P(F) = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}; \quad P(G) = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

ii)



$$P(F) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$$



$$P(G) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Unabhängigkeit: $F \cap G = \{(1; 1; 1; 1)\} \Rightarrow |F \cap G| = 1 \Rightarrow P(F \cap G) = \frac{1}{81}$

$$P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81} = P(F \cap G) \Rightarrow F \text{ und } G \text{ sind unabhängig}$$

c) Am einfachsten mit Vierfeldertafel. Bekannt ist: $P(F) = \frac{3}{81}; P(G) = \frac{27}{81}; P(F \cap G) = \frac{1}{81}$

Damit lassen sich alle Felder berechnen:

Es genügt aber auch nur die eine Rechnung der Tafel:

$$P(\bar{F} \cap G) = P(G) - P(F \cap G) = \frac{27}{81} - \frac{1}{81} = \frac{26}{81}$$

	G	\bar{G}	
F	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{3}{81}$
\bar{F}	$\frac{26}{81}$	$\frac{52}{81}$	$\frac{78}{81}$
	$\frac{27}{81}$	$\frac{54}{81}$	

d) Die Ziffern von (3; 1; 1;1) mit der Anzahl der Möglichkeiten, an welcher Stelle die 3 steht

ergeben $\binom{4}{1} = 4$ Ergebnisse.

Die Ziffern von (2; 2; 1;1) mit der Anzahl der Möglichkeiten, an welchen Stellen die 2 steht

ergeben $\binom{4}{2} = 6$ Ergebnisse. $\Rightarrow P(\text{„Quersumme 6“}) = \frac{4+6}{81} = \frac{10}{81}$

Lösung: Abitur GK M, 1988, VI, Seite 2

- e) Wenn die beiden gleichen Ziffern in den ersten beiden Positionen stehen, gibt es 3 Möglichkeiten für die erste Position, 1 für die zweite Position (da die Ziffer gleich sein muss), 2 für die dritte Position (aus den verbleibenden zwei Ziffern) und 1 für die letzte Position, da die Ziffer anders als die vorherigen sein muss. Hinzu kommen die Anzahlen der Möglichkeiten, wie man die Positionen für die gleichen Ziffern raussuchen kann.

$$\text{Die Anzahl ist: } \binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 36 \quad \Rightarrow \quad P(\text{„2 gleiche Ziffern“}) = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

2. a) Die Wahrscheinlichkeit von 0 Treffern (des Ereignisses E_2) bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = \frac{24}{81}$ bei einer Bernoullikette der Länge 10 ist:

$$B(10; \frac{24}{81}; 0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{24}{81}\right)^0 \cdot \left(\frac{57}{81}\right)^{10} = \left(\frac{19}{27}\right)^{10} \approx 0,029778 \approx 2,98\%$$

- b) Das Gegenereignis zu „wenigstens ein Treffer“ ist „kein Treffer“. Die Aufgabenstellung bedeutet: $P(\text{„wenigstens ein Treffer“}) > 99,9\%$. Daraus folgt:

$$1 - P(\text{„kein Treffer“}) > 0,999 \Leftrightarrow P(\text{„kein Treffer“}) < 0,001 \Leftrightarrow B(n; \frac{24}{81}; 0) < 0$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{24}{81}\right)^0 \cdot \left(\frac{57}{81}\right)^n < 0,001 \Leftrightarrow \left(\frac{19}{27}\right)^n < 0,001 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{19}{27}\right)^n < \ln 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{19}{27}\right) < \ln 0,001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,001}{\ln\left(\frac{19}{27}\right)} \approx 19,658.$$

Es muss also mindestens 20-mal gespielt werden.

3. Nullhypothese $H_0: p = \frac{24}{81}$; Alternative $H_1: p = 0,20$

(für die Nullhypothese:) Annahmebereich $A = \{25; 26; 27; \dots; 34\}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; 24\} \cap \{35; 36; 37; \dots; 100\}$

Der Automat wird für ein Laplace-Gerät gehalten, also geht es um die Wahrscheinlichkeit des Annahmebereichs.

Es wird irrtümlich dafür gehalten, also liegt tatsächlich die Alternative vor. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{0,2}^{100}(A) = P_{0,2}^{100}(25 \leq Z \leq 34) = P_{0,2}^{100}(Z \leq 34) - P_{0,2}^{100}(Z \leq 24) \approx 0,99966 - 0,86865 \\ = 0,13101 \approx 13,1\%$$

(Es handelt sich um einen Fehler 2. Art.)