Lösung: Abitur GK M, 1988, VI

1. a) Es gibt viele verschiedene Wege:

i) einfacher Weg (mit Tabelle; gibt nur Näherungswerte):
$P(E_1) = B(4;\ \frac{1}{3} : 1) \approx\ 0{,}39506$; $P(E_2) = B(4;\ \frac{1}{3} : 2) \approx\ 0{,}29630$

ii) genaues Ergebnis über die Bernoulli-Formel:
$P(E_1) = B(4;\ \frac{1}{3} : 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81}$;
$P(E_2) = B(4;\ \frac{1}{3} : 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$

iii) genaues Ergebnis über Kombinatorik:
Versuch mit Zurücklegen:
als Variation: $|\Omega| = 3^4 = 81$; mit Zählprinzip: $|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

E_1: Für die 1 gibt es an jeder Stelle eine, für nicht 1 an jeder Stelle zwei Möglichkeiten.
Es gibt $\binom{4}{1}$ Möglichkeiten für die Position der 1.

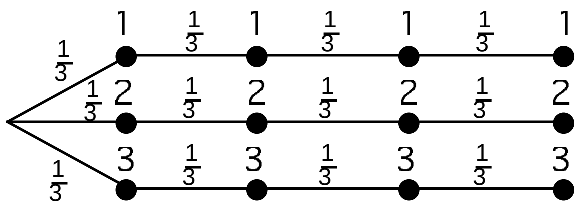
$\Rightarrow\ |E_1| = \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \quad \Rightarrow\ P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{32}{81}$

E_2: entsprechend: $|E_2| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \quad \Rightarrow\ P(E_2) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$

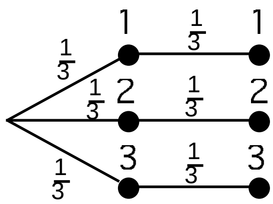
iv) mit Baumdiagramm (Weg wie in Teilaufgabe 1.a))

b) i) mit Ω aus Teilaufgabe 1. a): $F = \{(1;\ 1;\ 1;\ 1);\ (2{:}\ 2;\ 2;\ 2);\ (3;\ 3;\ 3;\ 3)\}$; $\Rightarrow\ |F| = 3$
Zählprinzip: $|G| = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\quad\Rightarrow\ P(F) = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$; $P(G) = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

ii)



$P(F) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$



$P(G) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Unabhängigkeit: $F \cap G = \{(1;\ 1;\ 1;\ 1)\}\ \Rightarrow\ |F \cap G| = 1\ \Rightarrow\ P(F \cap G) = \frac{1}{81}$
$P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81} = P(F \cap G)\ \Rightarrow$ F und G sind unabhängig

c) Am einfachsten mit Vierfeldertafel. Bekannt ist: $P(F) = \frac{3}{81}$; $P(G) = \frac{27}{81}$; $P(F \cap G) = \frac{1}{81}$

Damit lassen sich alle Felder berechnen:

Es genügt aber auch nur die eine Rechnung der Tafel:

$P(\overline{F} \cap G) = P(G) - P(F \cap G) = \frac{27}{81} - \frac{1}{81} = \frac{26}{81}$

	G	$\overline{G}$	
F	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{3}{81}$
$\overline{F}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{52}{81}$	$\frac{78}{81}$
	$\frac{27}{81}$	$\frac{54}{81}$	

d) Die Ziffern von (3; 1; 1;1) mit der Anzahl der Möglichkeiten, an welcher Stelle die 3 steht ergeben $\binom{4}{1} = 4$ Ergebnisse.
Die Ziffern von (2; 2; 1;1) mit der Anzahl der Möglichkeiten, an welchen Stellen die 2 steht ergeben $\binom{4}{2} = 6$ Ergebnisse. $\quad\Rightarrow$ P(„Quersumme 6“) $= \frac{4+6}{81} = \frac{10}{81}$

e) Wenn die beiden gleichen Ziffern in den ersten beiden Positionen stehen, gibt es 3 Möglichkeiten für die erste Position, 1 für die zweite Position (da die Ziffer gleich sein muss), 2 für die dritte Position (aus den verbleibenden zwei Ziffern) und 1 für die letzte Position, da die Ziffer anders als die vorherigen sein muss. Hinzu kommen die Anzahlen der Möglichkeiten, wie man die Positionen für die gleichen Ziffern raussuchen kann.
Die Anzahl ist: $\binom{4}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1 = 36$ $\quad\Rightarrow$ P(„2 gleiche Ziffern“) = $\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

2. a) Die Wahrscheinlichkeit von 0 Treffern (des Ereignisses E_2) bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = \frac{24}{81}$ bei einer Bernoullikette der Länge 10 ist:
$B(10;\ \frac{24}{81};\ 0) = \binom{10}{0}\cdot\left(\frac{24}{81}\right)^0\cdot\left(\frac{57}{81}\right)^{10} = \left(\frac{19}{27}\right)^{10} \approx 0{,}029778 \approx 2{,}98\%$

b) Das Gegenereignis zu „wenigstens ein Treffer“ ist „kein Treffer“. Die Aufgabenstellung bedeutet: P(„wenigstens ein Treffer“) > 99,9%. Daraus folgt:
1 – P(„kein Treffer“) > 0,999 $\Leftrightarrow$ P(„kein Treffer“) < 0,001 $\Leftrightarrow$ $B(n;\ \frac{24}{81};\ 0) < 0$
$\Leftrightarrow \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{24}{81}\right)^0\cdot\left(\frac{57}{81}\right)^n < 0{,}001 \Leftrightarrow \left(\frac{19}{27}\right)^n < 0{,}001 \Leftrightarrow ln\left(\frac{19}{27}\right)^n < ln\,0{,}001$
$\Leftrightarrow n\cdot ln\left(\frac{19}{27}\right) < ln\,0{,}001 \Leftrightarrow n > \dfrac{ln\,0{,}001}{ln\left(\frac{19}{27}\right)} \approx 19{,}658$.
Es muss also mindestens 20-mal gespielt werden.

3. Nullhypothese H_0: $p = \frac{24}{81}$; Alternative H_1: p = 0,20
(für die Nullhypothese:) Annahmebereich $A = \{25; 26; 27; \ldots; 34\}$
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; 24\} \cap \{35; 36; 37; \ldots; 100\}$
Der Automat wird für ein Laplace-Gerät gehalten, also geht es um die Wahrscheinlichkeit des Annahmebereichs.
Es wird irrtümlich dafür gehalten, also liegt tatsächlich die Alternative vor. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$P_{0,2}^{100}(A) = P_{0,2}^{100}(25 \le Z \le 34) = P_{0,2}^{100}(Z \le 34) - P_{0,2}^{100}(Z \le 24) \approx 0{,}99966 - 0{,}86865$
$= 0{,}13101 \approx 13{,}1\%$
(Es handelt sich um einen Fehler 2. Art.)