BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.

6 1. a) Bestimmen Sie D_f und prüfen Sie, ob der Graph Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt.
Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

7 b) Zeigen Sie: $f'(x) = -f(x) \cdot \dfrac{2x-1}{x^2}$
Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung Art und Lage des Extrempunkts von G_f.

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f, die den Ursprung enthält.

6 d) Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie des Grenzwerts $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = 0$ (Nachweis nicht verlangt) den Graphen G_f im Bereich $-3 < x < 3$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 2 cm. Zeichnen Sie auch die Tangente t ein.

2. Die Integralfunktion J ist definiert durch

$$J(x) = \int_{0,5}^{x} f(t)\,dt \quad \text{für } x > 0.$$

6 a) Begründen Sie ohne Berechnung der integralfreien Darstellung von J, weshalb folgende Aussagen zutreffen:
J ist streng monoton steigend.
J besitzt genau eine Nullstelle.
Der Graph von J hat genau einen Wendepunkt.

7 b) Ermitteln Sie nun eine integralfreie Darstellung von J(x). Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} J(x)$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} J(x)$ und geben Sie den Inhalt des Flächenstücks an, das sich im 1. Quadranten zwischen dem Graphen G_f und der x-Achse ins Unendliche erstreckt.

3 c) Skizzieren Sie den Graphen von J unter Verwendung aller Ergebnisse in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d.

40