BE

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\cdot \ln(x+1)}$ mit der größtmöglichen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
Hinweis: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x \cdot \ln x) = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Bestimmen Sie D_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Geben Sie auch alle Asymptoten an.

7 b) Bestätigen Sie: $f'(x) = -\dfrac{1+\ln(x+1)}{[(x+1)\cdot \ln(x+1)]^2}$
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunkts.

3 c) Geben Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt $(e-1 \mid \frac{1}{e})$ an.

6 d) Zeichnen Sie G_f und die Tangente t unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 < x < 4$ [Längeneinheit 2 cm].

4 2. a) Begründen Sie allgemein, dass jede streng monotone Funktion umkehrbar ist. Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass jedoch nicht jede umkehrbare Funktion streng monoton ist.

3 b) Die Einschränkung f* von f auf $D^* = \mathbb{R}^+$ ist umkehrbar. Für die Umkehrfunktion g von f* lässt sich kein Funktionsterm g(x) angeben. Geben Sie trotzdem $g\left(\frac{1}{e}\right)$ und $g'\left(\frac{1}{e}\right)$ an.

3. Nun wird für $k > 0$ die Schar der Integralfunktionen $J_k: x \mapsto \int_k^x f(t)\,dt$ betrachtet.

1 a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_k von J_k an.

4 b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von J_k.

6 c) Es gilt: $J_{e-1}(x) = \ln(\ln(x+1))$.
Lösen Sie die Gleichung
$$-J_{e-1}\left(\sqrt{e}-1\right) = J_{e-1}(x)$$
nach x auf und deuten Sie Ihr Ergebnis anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe 1d geometrisch.

40