BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto -\frac{x^2}{x+k}$
mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

6 1. a) Geben Sie D_k sowie die Nullstelle von f_k an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs.

8 b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k und bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_k.

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f_k'(x) = -\frac{x(x+2k)}{(x+k)^2}\right]$$

3 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, auf der die Extrempunkte aller Graphen G_k liegen.

Im Folgenden sei k = 1.

5 2. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der schiefen Asymptote des Graphen G_1 und zeigen Sie, dass diese den Graphen nicht schneidet.

6 b) Zeichnen Sie den Graphen G_1 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse zusammen mit seinen Asymptoten und der Geraden g im Bereich $-5 < x < 3$ (Längeneinheit 1 cm).
Berücksichtigen Sie dafür auch, dass der Graph G_1 symmetrisch zum Punkt $(-1 \mid 2)$ ist (Nachweis nicht erforderlich).

3 c) Geben Sie eine Beziehung zwischen $f_1(-1+t)$ und $f_1(-1-t)$ für $t \neq 0$ an, welche die in Teilaufgabe 2b genannte Punktsymmetrie algebraisch beschreibt.

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)$ für $x > -1$ Stammfunktion von f_1 ist.

6 b) Der Graph G_1, die y-Achse und die zwei Geraden mit den Gleichungen $y = -x+1$ sowie $x = u$ $(u > 0)$ schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein. Bestimmen Sie A(u) und berechnen Sie u so, dass $A(u) = 1$ ist.

40