BE

II.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

7 1. a) Bestimmen Sie D_k. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_k an.

5 b) Zeigen Sie, dass in D_k gilt: $f_k\left(-\frac{1}{k} - x\right) = f_k\left(-\frac{1}{k} + x\right)$
Welche Symmetrieeigenschaft von G_k ist damit nachgewiesen?

5 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k.

6 d) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen gemeinsamen Punkt P haben, und stellen Sie eine Gleichung der Tangente t_k im Punkt P auf.

[Teilergebnis: $P(0|1)$]

Im Folgenden sei $k = 0{,}5$.

7 2. Berechnen Sie die Abszissen der Punkte von $G_{0,5}$, deren Ordinate den Wert 4 hat. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ sowie $t_{0,5}$ (vgl. Teilaufgabe 1d) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-8 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).

3 3. a) Zeigen Sie, dass $F: \; x \mapsto \dfrac{-4}{x+2}$ mit $D_F = D_{0,5}$ eine Stammfunktion von $f_{0,5}$ ist.

3 b) Ermitteln Sie die obere Integrationsgrenze t so, dass $\int_0^t f_{0,5}(x)\,dx = 1$ ist.

4 c) Der Graph $G_{0,5}$, die x-Achse, die Gerade $x = 2$ und die Gerade $x = u$ $(u > 2)$ schließen ein Flächenstück vom Inhalt $A(u)$ ein.
Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

40