BE

II.

Hinweis: Im folgenden dürfen die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ und

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x \ln x) = 0$ ohne Beweis verwendet werden.

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5 a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs D_f. Geben Sie an, ob f in $x = 0$ stetig ergänzt werden kann.

5 b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.
Untersuchen Sie das Verhalten der Ableitungsfunktion f' für $x \overset{>}{\to} 0$.
Substituieren Sie dazu $\frac{1}{x}$ durch z.

3 c) Skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto e^{-x^n}$, wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist. G_n ist der Graph von f_n.

2 2. a) Alle Graphen G_n haben zwei gemeinsame Punkte (Nachweis nicht erforderlich). Geben Sie deren Koordinaten an.

5 b) Untersuchen Sie gegebenenfalls mittels Fallunterscheidung das Verhalten von f_n für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$. Für welche n ist G_n symmetrisch zur y - Achse?

6 c) Zeigen Sie, daß jeder Graph G_n einen Punkt mit waagrechter Tangente hat. Bestimmen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung die Art dieses Punktes in Abhängigkeit von n.

5 d) Berechnen Sie $f_2\left(\frac{1}{2}\right)$, $f_3(-1)$ und $f_3\left(\frac{1}{2}\right)$, und zeichnen Sie in einem neuen Koordinatensystem G_2 und G_3 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).

3. Der Graph G_2 rotiert um die y - Achse. Der entstehende, sich ins Unendliche erstreckende Rotationskörper wird mit einer zur y - Achse senkrechten Ebene geschnitten, die vom Ursprung den Abstand y $(0 < y \leq 1)$ hat. Der Inhalt der Schnittfläche ist A(y).

4 a) Zeigen Sie, daß $A(y) = -\pi \cdot \ln y$ ist.

5 b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 A(y)dy$. Deuten Sie das

40