

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R}^+ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1+k \cdot \ln x}{x}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

Hinweis: Im folgenden dürfen die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ und

$\lim_{x \searrow 0} (x \ln x) = 0$ ohne Beweis verwendet werden.

- 3 1. a) Zeigen Sie, daß $e^{-\frac{1}{k}}$ Nullstelle von f_k ist. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Rändern des Definitionsbereichs.
- 8 b) Weisen Sie nach, daß G_k den Hochpunkt $H_k(x_H | y_H)$ mit $x_H = e^{1-\frac{1}{k}}$ und $y_H = k \cdot e^{\frac{1}{k}-1}$ besitzt. Zeigen Sie, daß H_1 auf allen Graphen G_k liegt.
- 7 c) Berechnen Sie $f_k(e)$ für $k = \frac{1}{2}$ und $k = 2$. Zeichnen Sie die Graphen $G_{\frac{1}{2}}$ und G_2 unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).
- 6 2. a) Welche Werte nimmt x_H aus Teilaufgabe 1b für $k \in \mathbb{R}^+$ an? Begründen Sie Ihre Antwort.
- 5 b) Zeigen Sie, daß für y_H aus Teilaufgabe 1b gilt:
- $$y_H = \frac{1}{x_H \cdot (1 - \ln x_H)}$$
- Wie verhält sich y_H für $x_H \searrow 0$ und für $x_H \searrow e$?
- 3 c) Skizzieren Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse die Kurve K , auf der die Hochpunkte H_k liegen, in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c.
- 8 3. Bestimmen Sie k so, daß der Inhalt des endlichen Flächenstücks, das vom Graphen G_k , der x -Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird, den Wert 1 hat.