Abitur 1997 Grundkurs, II Infinitesimalrechnung

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto (x+1)^2 \cdot e^{1-x}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.
Hinweis: Im Folgenden darf ohne Beweis verwendet werden:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$. Ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen, und geben Sie die Wertemenge von f an. (7 BE)

   (b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.
   [Zur Kontrolle: $f'(x) = (1-x^2) \cdot e^{1-x}$] (8 BE)

   (c) Berechnen Sie $f(-1,25)$, $f(3)$ sowie $f(5)$, und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1,25 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1 cm, Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-6 \leq y \leq 6$). (6 BE)

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $g : x \mapsto 2(x+1) \cdot e^{1-x}$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei G_g.

2. (a) Weisen Sie nach, dass f und g nur an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gleiche Funktionswerte haben. (4 BE)

   (b) Der Graph G_g besitzt als einzigen Extrempunkt einen Hochpunkt (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie dessen Koordinaten. (4 BE)

   (c) Berechnen Sie $g(-1,25)$, $g(3)$ sowie $g(5)$, und zeichnen Sie G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1,25 \leq x \leq 5$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein. (4 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = f(x) + f'(x)$. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie nun den Inhalt der Fläche, die im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ von G_f und G_g begrenzt wird. (4 BE)