

## GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

### I.

Gegeben ist für  $a \neq 0$  die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto x + \frac{x+a}{x}$$

mit Definitionsmenge  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Der zu  $f_a$  gehörige Graph wird mit  $G_a$  bezeichnet.

- 7 1. a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ . Untersuchen Sie - gegebenenfalls mittels Fallunterscheidung - das Verhalten von  $f_a$  an den Rändern des Definitionsbereichs.
- 3 b) Zeigen Sie, daß die Graphen  $G_a$  eine gemeinsame schiefe Asymptote  $g$  haben, und geben Sie eine Gleichung von  $g$  an.
- 5 c) Weisen Sie die Gültigkeit folgender Beziehung nach :

$$f_a(x) - 1 = 1 - f_a(-x)$$

Welche Symmetrieeigenschaft des Graphen  $G_a$  ist damit nachgewiesen?

- 8 d) Für welche Werte von  $a$  hat  $G_a$  zwei Extrempunkte? Bestimmen Sie Art und Lage eines jeden Extrempunkts.
- 7 e) Berechnen Sie  $f_1(x)$  und  $f_{-2}(x)$  für  $x = 1$  und  $x = 4$ , und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse die Graphen von  $f_1$  und  $f_{-2}$  sowie die Asymptote  $g$  aus Teilaufgabe 1b im Bereich  $-4 \leq x \leq 4$  (Längeneinheit 1 cm).

- 3 2. a) Zeigen Sie, daß  $F_a : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2} + a \ln x$  für  $x > 0$  eine Stammfunktion von  $f_a$  ist.

- 7 b) Die Graphen  $G_1$ ,  $G_{-2}$  und die Geraden mit den Gleichungen  $x = 1$  und  $x = k$  ( $k > 1$ ) schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie  $k$  so, daß der Inhalt dieses Flächenstücks 3 ist.