

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion

$$f : x \mapsto \frac{e^{|x|}}{e^x + 1}.$$

Ihr Graph wird mit G bezeichnet.

1. (a) Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Begründen Sie, dass f stetig ist. (3 BE)

- (b) Bestimmen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$ und zeigen Sie damit, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Koordinaten und Art des Extrempunkts.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ für $x > 0$] (8 BE)

- (c) Berechnen Sie $f(1)$ und $f(-1)$, und zeichnen Sie G unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (5 BE)

2. Die Einschränkung von f auf \mathbb{R}_0^+ wird mit g bezeichnet.

- (a) Begründen Sie, dass g umkehrbar ist, bestimmen Sie den Funktionsterm $g^{-1}(x)$ und geben Sie Definitions- und Wertemenge von g^{-1} an. (4 BE)

- (b) Bestimmen Sie den Grenzwert der ersten Ableitung von g^{-1} bei rechtsseitiger Annäherung an die Stelle $x = \frac{1}{2}$, ohne den Term $g^{-1}(x)$ zu differenzieren. (3 BE)

- (c) Zeichnen Sie den Graphen von g^{-1} unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein. (3 BE)

3. Nun wird die in ganz \mathbb{R} definierte Funktion $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ betrachtet.

- (a) Begründen Sie, ohne die Integration auszuführen, folgende Eigenschaften von F : F ist differenzierbar, F besitzt genau eine Nullstelle, der Graph von F weist keine horizontale Tangenten auf und hat den Ursprung als Wendepunkt. (6 BE)

- (b) Bestimmen Sie nun eine integralfreie Darstellung von $F(x)$ für $x \geq 0$. (3 BE)

- (c) Untersuchen Sie, ob das für $x \geq 0$ zwischen G und der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ gelegene Flächenstück einen endlichen Inhalt besitzt. (5 BE)