BAYERN Abitur 1996 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_k : x \mapsto \frac{1}{x \cdot (k - \ln x)^2}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$. Der zu f_k gehörige Graph wird mit G_k bezeichnet.

1. (a) Begründen Sie, dass $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathrm{e}^k\}$ ist. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von $\mathbb{D}_k$.
   Hinweis: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \cdot (\ln x)^n = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ kann verwendet werden. (6 BE)

   (b) Zeigen Sie: $f_k'(x) = \dfrac{2 - k + \ln x}{x^2 \cdot (k - \ln x)^3}$.
   Bestimmen Sie Koordinaten und Art des Extrempunkts von f_k und geben Sie das Monotonieverhalten von f_k an. (10 BE)

   (c) Berechnen Sie $f_1(\mathrm{e}^2)$, $f_1(1)$ und $f_1'(1)$. Zeichnen Sie G_1 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (6 BE)

2. Jeder Graph G_k hat genau eine Tangente t_k, die durch den Ursprung geht.

   (a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für t_k und zeichnen Sie t_1 in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein.
   [Ergebnis: $t_k : x \mapsto \mathrm{e}^{2-2k} \cdot x$] (7 BE)

   (b) Die Tangente t_k bildet mit der x-Achse und der Geraden $x = \mathrm{e}^k$ ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von k ist. (2 BE)

3. (a) Bestimmen Sie mittels einer geeigneten Substitution eine Stammfunktion F_k von f_k.
   [mögliches Ergebnis: $F_k(x) = \dfrac{1}{k - \ln x}$] (4 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass die uneigentlichen Integrale

   $$\int_0^{\frac{\mathrm{e}}{2}} f_1(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \int_{2\mathrm{e}}^{\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

   existieren und gleich sind. (5 BE)