

Analytische Geometrie II

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die beiden Geradenscharen g_t und h_t

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ 2 + 5t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$.

1. (a) Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar g_t zueinander parallel sind und dass alle Geraden der Schar h_t einen gemeinsamen Punkt haben. (2 BE)
- (b) Die Ebene G enthält alle Geraden g_t . Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform. Welche besondere Lage hat die Ebene G im Koordinatensystem?
[mögliches Ergebnis: $G : 3x_1 - x_3 = 0$] (5 BE)
- (c) Weisen Sie nach, dass alle Geraden h_t in der Ebene $H : 3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$ liegen. (3 BE)
- (d) G und H schneiden sich in einer Geraden s . Ermitteln Sie eine Gleichung von s .
[zur Kontrolle: $s = g_6$] (5 BE)

Im Folgenden bezeichnen G und H die in Teilaufgabe 1 definierten Ebenen. Die Ebene $F : 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ enthält die Geraden g_2 und h_2 (Nachweis nicht erforderlich).

2. (a) Welche gegenseitige Lage haben die Geraden g_2 und h_2 ? (3 BE)
- (b) Berechnen Sie den Abstand von g_2 und h_2 . (5 BE)
- (c) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen der Ebenen F , G und H sowie ihrer Schnittgeraden zueinander hervorgehen. (4 BE)
3. (a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Ebenen F , G und H gemeinsamen Lotebenen haben, und geben Sie eine Gleichung derjenigen Lotebene L in Normalenform an, die den Ursprung enthält. (5 BE)
- (b) Die drei Ebenen F , G und H schneiden aus L ein Dreieck heraus. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt, und entscheiden Sie, ob der Ursprung innerhalb, außerhalb oder auf dem Rand des Dreiecks liegt. (8 BE)