Analytische Geometrie I

1. (a) Wann heißen n Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig? (2 BE)

   (b) In einem vierdimensionalen reellen Vektorraum gelten zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ die Beziehungen $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_4$ und $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linear abhängig sind. (4 BE)

   Gegeben ist ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$.

2. Geben Sie eine Normalenform der Ebene E an, die die Richtungsvekotren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   hat und den Punkt $P(3|-2|2)$ enthält.

   [mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 12 = 0$] (4 BE)

3. Die Ebene E aus Aufgabe 2 begrenzt mit den drei Koordinatenebenen eine dreiseitige Pyramide Λ.

   (a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken von Λ und fertigen Sie ein Schrägbild an. (4 BE)

   (b) Die Kante von Λ, die auf der x_2-Achse liegt, und die ihr gegebüberliegende Kante legen zwei Geraden fest, die zueinander windschief sind. Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden. (7 BE)

   (c) Bestimmen Sie den Punkt R, der von den Ecken von Λ gleiche Entfernung hat. Begründen Sie durch Rechnung, dass R außerhalb von Λ liegt.
   [Ergebnis: $R(3|-3|6)$] (6 BE)

   (d) Bestimmen Sie den Parameter s so, dass der Punkt $S(s|-s|s)$ von allen vier Seitenflächen von Λ gleichen Abstand hat und im Innern von Λ liegt.
   [Ergebnis: $s = 1{,}5$] (7 BE)

   (e) Um den Punkt R kann eine Kugel K_1 gelegt werden, welche die vier Eckpunkte von Λ enthält. Um den Punkt S kann eine Kugel K_2 gelegt werden, welche die vier Seitenflächen von Λ berührt. Berechnen Sie den kleinsten Abstand (auf zwei Dezimalen genau), den zwei Punkte $C \in K_1$ und $D \in K_2$ haben können. (6 BE)