Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_k : x \mapsto x^{-k} \cdot \ln(x^2)$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Die Definitionsmenge von f_k wird mit $\mathbb{D}_k$ bezeichnet.

1. Zunächst wird $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt.

   (a) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to 0$ und $x \to \infty$. (3 BE)

   (b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_k sowie die Lage und Art des Extrempunktes des Graphen von f_k.
   [Zur Kontrolle: $f_k'(x) = 2 \cdot x^{-k-1} \cdot (1 - k \ln x)$] (7 BE)

   (c) Zeigen Sie: Alle Graphen der Scharfunktionen f_k haben im gemeinsamen Schnittpunkt mit der x-Achse die gleiche Tangente. (4 BE)

2. Im Folgenden sei $\mathbb{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

   (a) Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie. (4 BE)

   (b) Berechnen Sie auf zwei Dezimalen die Werte $f_1(0,5)$, $f_1(4)$, $f_2(0,5)$, $f_2(4)$. Skizzieren Sie G_1 und G_2 unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem (Hochformat, Ursprung Blattmitte, Längeneinheit 2 cm). (8 BE)

3. Im Folgenden wird das bestimmte Integral $I = \int\limits_2^4 f_2(x)\,\mathrm{d}x$ betrachtet.

   (a) Berechnen Sie für I und eine Zerlegung des Integrationsintervalls in vier gleich lange Teilintervalle die zugehörige Untersumme s und die zugehörige Obersumme S (auf drei Dezimalen gerundet).
   [Zur Kontrolle: $s = 0,458$; $S = 0,544$] (6 BE)

   (b) Berechnen Sie den exakten Wert von I. Um wieviel Prozent weicht der Mittelwert aus s und S vom exakten Wert von I ab?
   [zur Kontrolle: Eine Stammfunktion von f_2 auf $\mathbb{R}^+$ ist $x \mapsto -\frac{2}{x}(1+\ln x)$.] (8 BE)