BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f : x \mapsto \frac{4x-4}{x^2-2x+2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge D_f.

4 1. a) Zeigen Sie: $D_f = \mathbb{R}$.
Geben Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und die Nullstelle von f an.

9 b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f an.

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f'(x) = \frac{4x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}\right]$$

4 c) Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x+1)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
Welche Symmetrieeigenschaft hat demnach der Graph von f?

6 d) Berechnen Sie die Werte $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-1)$ und $f(0{,}5)$.
Zeichnen Sie mit Hilfe aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f im Intervall $[-4;6]$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

3 2. a) Begründen Sie, daß f auf $]-\infty;0]$ umkehrbar ist, und geben Sie die Definitions- und die Wertemenge der Umkehrfunktion g an.

6 b) Zeigen Sie: $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$.
Begründen Sie damit, daß sich die Graphen von f und g im Punkt $S\left(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}\right)$ schneiden. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1d ein.

2 3. a) Zeigen Sie, daß $F : x \mapsto 2 \cdot \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

6 b) Die Graphen von f und g und die Koordinatenachsen begrenzen ein Flächenstück im III. Quadranten. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks (auf zwei Dezimalen gerundet).
Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie des Flächenstücks.

40