Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(3|4|6)$, $B(-2|4|6)$ und $C(-2|0|3)$ die Ebene E fest. Außerdem ist die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. (a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform auf.
   [mögliches Ergebnis: $E : 3x_2 - 4x_3 + 12 = 0$] (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig mit Basis $[AC]$ ist. (4 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist. (3 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Gerade g und die Ebene E nur den Punkt C gemeinsam haben. (5 BE)

   (b) Das Lot zur Ebene E durch den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ heiáe h. Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h in genau einem Punkt S schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten von S.
   [Teilergebnis: $S(0,5|3,5|2,5)$] (7 BE)

   (c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$ mit Grundfläche $ABCD$. (4 BE)

3. Die Schwerpunkte der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS$ bilden ein Quadrat, das in einer Parallelebene E' zu E liegt (Nachweis nicht erforderlich).

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats. (7 BE)

   (b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes M (vgl. Teilaufgabe 2b) von der Ebene E'. (5 BE)