BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$ mit der größtmöglichen Definitionsmenge D_f. Der zu f gehörende Graph heißt G_f.

3 1. a) Bestimmen Sie D_f, untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie, und geben Sie die Nullstellen von f an.

8 b) Berechnen Sie die Ableitung f' von f, und geben Sie die maximale Definitionsmenge $D_{f'}$ von f' an.

$$\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

Ermitteln Sie ohne Benützung der zweiten Ableitung Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Untersuchen Sie das Verhalten von f' an den Rändern von $D_{f'}$, und deuten Sie die Ergebnisse geometrisch.

5 c) Berechnen Sie $f(0{,}5)$, $f(0{,}9)$ und $f'(0)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 5 cm).

5 2. a) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

4 b) Zeichnen Sie den Graphen der Relation $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ in das bereits angelegte Koordinatensystem.
Welchen Inhalt hat die von diesem Graphen umschlossene Fläche?

3. Nun wird die Funktion $g: x \mapsto \arcsin f(x)$ mit der Definitionsmenge $D_g = [0;1]$ betrachtet. Der Graph von g heißt G_g.

5 a) Geben Sie die Wertemenge und die Nullstellen von g an.
Begründen Sie ausführlich ohne Bezugnahme auf die erste Ableitung, daß g an der Stelle $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ein lokales Maximum hat, und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an.

8 b) Berechnen Sie $g'(x)$, und geben Sie die maximale Definitionsmenge $D_{g'}$ von g' an. Wie verhält sich g' an den Rändern von $D_{g'}$?

7 c) Zeigen Sie, daß g in der Form $g(x) = \begin{cases} 2 \cdot \arcsin x & \text{für } x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 2 \cdot \arcsin(-x) + c & \text{für } x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right] \end{cases}$

mit $c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann, und bestimmen Sie den Wert von c.

5 d) Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in das bereits angelegte Koordinatensystem.

50