BE

L 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{x}{x-1}$. Der zu g gehörende Graph heißt G_g.

4 1. a) Geben Sie die Nullstelle von g an, untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen der Definitionsmenge, und geben Sie die Monotoniebereiche von g an.

4 b) Begründen Sie, daß g eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, und geben den Term $g^{-1}(x)$ an. Was folgt aus dem Ergebnis für die Symmetrie des Graphen G_g?

3 c) Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Berücksichtigung des Funktionswertes $g(2)$. Zeichnen Sie zusätzlich mit anderer Farbe den Graphen G_h der Funktion $h : x \mapsto |g(x)|$ mit $D_h = D_g$ ein (Längeneinheit 1 cm).

5 d) Der Graph G_h aus Teilaufgabe 1c zerlegt das Quadrat mit den Ecken $(0 \mid 0)$, $(1 \mid 0)$, $(1 \mid 1)$ und $(0 \mid 1)$ in zwei Teile. Bestimmen Sie den Inhalt der größeren Teilfläche.

2. Nun wird die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2} + \ln|g(x)|$ mit der maximalen Definitionsmenge D_f betrachtet. Der Graph von f heißt G_f.

5 a) Geben Sie D_f an, bestimmen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von D_f, und ermitteln Sie alle Geraden, die Asymptoten von G_f sind.

5 b) Zeigen Sie, daß der Graph G_f symmetrisch zum Punkt $P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$ ist.

4 c) Zeigen Sie, daß für alle $x \in D_f$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)}$.

3 d) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.

5 e) Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein neues Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

5 f) Geben Sie eine integralfreie Darstellung der Integralfunktion

$$F : x \mapsto \int_2^x \left(f(t) - \frac{t}{2} \right) dt \text{ mit } D_F =]1; \infty[.$$

7 g) Untersuchen Sie das Verhalten von F an den Grenzen von D_F, und deuten Sie beide Ergebnisse geometrisch.

50