

BE

II.

Gegeben ist die Schar der in  $\mathbb{R}_0^+$  definierten Funktionen  $f_k: x \mapsto x \cdot (k - \sqrt{x})$  mit  $k > 0$ . Der Graph von  $f_k$  wird mit  $G_k$  bezeichnet.

- 3 1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von  $G_k$  mit der  $x$ -Achse sowie das Verhalten von  $f_k(x)$  an den Grenzen der Definitionsmenge.  
7 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $f_k$ , und bestimmen Sie die Extrempunkte von  $G_k$  nach Lage und Art. Berechnen Sie auch  $\lim_{x \nearrow 0} f'_k(x)$ .  
4 c) Zeichnen Sie  $G_3$  im Bereich  $0 \leq x \leq 12$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Tangenten in den Nullstellen (Längeneinheit 1 cm).

Die beiden Tangenten an  $G_k$  im Ursprung  $O$  und im Schnittpunkt  $N$  von  $G_k$  mit der positiven  $x$ -Achse schneiden sich im Punkt  $A$ .

- 7 2. Berechnen Sie den Flächeninhalt  $J$  des Dreiecks  $ONA$  in Abhängigkeit von  $k$ .  
[zur Kontrolle:  $J = \frac{1}{6} k^3$ ]

3. Auf  $G_k$  wird ein Punkt  $P(r|s)$  mit  $0 < r < k^2$  gewählt. Seine senkrechte Projektion auf die  $x$ -Achse heißt  $Q$ .

- 9 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes  $P$  bei festem  $k$  so, daß das Fünfeck  $OPQNA$  einen extremalen Inhalt hat. Für die Art des Extremums genügt eine anschauliche Begründung.  
6 b) Untersuchen Sie, ob der Inhalt des Fünfecks  $OPQNA$  bei festem  $r$  und veränderlichem  $k$  ( $0 < r < k^2$ ) ein relatives Extremum annehmen kann.

4 4. Die Funktion  $f_3$  ist in  $\mathbb{R}^+$  eine Stammfunktion einer Funktion  $g$ . Bestimmen Sie mit möglichst wenig Rechenaufwand diejenigen

Werte von  $t \in \mathbb{R}^+$ , für die gilt:  $\int_t^x g(z) dz > f_3(x)$ .

5. Untersucht wird nun die in  $\mathbb{R}_0^+$  definierte Funktion  $h_k: x \mapsto \arctan f_k(x)$ .

- 6 a) Zeigen Sie, daß  $f_k$  und  $h_k$  gleiche Nullstellen und gleiche Extremstellen besitzen. Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} h_k(x)$  und  $\lim_{x \nearrow 0} h'_k(x)$ .  
4 b) Berechnen Sie  $h_3(4)$ , und skizzieren Sie den Graphen von  $h_3$  unter Verwendung aller Ergebnisse in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1c