BE

## L 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Durch $f_k: \ x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+k^2}{x}\right)$ mit $k > 0$ ist eine Schar von Funktionen mit jeweils maximaler Definitionsmenge $D_k$ gegeben. Der Graph von $f_k$ wird mit $G_k$ bezeichnet.

3 1. a) Geben Sie $D_k$ an, und untersuchen Sie das Verhalten von $G_k$ an den Grenzen von $D_k$.

5 b) Ermitteln Sie die Nullstellen von $f_k$ (Fallunterscheidung!).

9 2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $f_k$, und geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von $G_k$ an.
Auf welcher Ortskurve c liegen die Extrempunkte?

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f_k'(x) = \frac{x^2-k^2}{x\left(x^2+k^2\right)}\right]$$

5 3. Zeigen Sie, daß $f_k(x) - \ln x > 0$ gilt, und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty}(f_k(x) - \ln x)$.
Deuten Sie beides geometrisch.

8 4. Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse für $k = 1$ und $k = \frac{1}{2}$ die Graphen $G_k$ im Bereich $0 < x \leqq 4$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 4 cm). Zeichnen Sie auch den Graphen von $x \mapsto \ln x$ und die Ortskurve c aus Teilaufgabe 2 ein.

3 5. a) Begründen Sie, daß die Einschränkung von $f_k$ auf das Intervall $[k; \infty[$ eine Umkehrfunktion $g_k$ hat. Geben Sie die Definitionsmenge von $g_k$ an.

7 b) Berechnen Sie $g_k'\left(\ln\frac{5k}{2}\right)$, ohne die Umkehrfunktion explizit zu ermitteln.

6 6. a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von $f_1$. Beginnen Sie mit partieller Integration.
[zur Kontrolle:
eine mögliche Stammfunktion ist $x \mapsto 2\cdot\arctan(x) + x\cdot\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - x$]

4 b) Berechnen Sie $\int\limits_1^\infty (f_1(x) - \ln x)\,dx$, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$.