BE

G 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen

$$f_a : x \mapsto \frac{2x^2 - 4a^2}{x^2 - a^2} \quad \text{mit } D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{-a ; +a\}.$$

Die Graphen der Schar werden mit G_a bezeichnet.

4 1. a) Untersuchen Sie G_a auf Symmetrie, und ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen.

6 b) Geben Sie die Gleichungen sämtlicher Asymptoten von G_a an. Zeigen Sie, daß die Graphen G_a für $x > a$ unterhalb der horizontalen Asymptote verlaufen.

6 c) Zeigen Sie, daß alle Graphen G_a denselben Extrempunkt besitzen, und bestimmen Sie dessen Art und Lage.

4 2. Weisen Sie nach, daß $F_a : x \mapsto 2x + a[\ln(x + a) - \ln(x - a)]$ für $x > a$ Stammfunktion von f_a ist.

3. Im folgenden sei immer $a = \sqrt{2}$.

3 a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an $G_{\sqrt{2}}$ im Schnittpunkt mit der positiven x - Achse.

8 b) Berechnen Sie $f_{\sqrt{2}}(1)$, $f_{\sqrt{2}}(3)$, und zeichnen Sie $G_{\sqrt{2}}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-6 \leqq x \leqq +6$ (Längeneinheit 1 cm). Tragen Sie auch die Tangente t ein.

9 c) Zeigen Sie, daß die in Teilaufgabe 3a berechnete Tangente t die horizontale Asymptote von $G_{\sqrt{2}}$ an der Stelle $x_0 = 2,5$ schneidet. Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das $G_{\sqrt{2}}$ mit seiner horizontalen Asymptote, der Tangente t und der Geraden $x = 6$ einschließt. Geben Sie A auf zwei Dezimalen gerundet an.

40