BE

II.

1. Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2|x|}{1-x^2}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Der zu f gehörende Graph sei G_f.

5 a) Geben Sie D_f an. Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie. Bestimmen Sie das Verhalten von f (x) an den Rändern von D_f, und geben Sie die Asymptoten des Graphen G_f an.

8 b) Berechnen Sie f '(x), untersuchen Sie das Verhalten von f '(x) bei x = 0, und geben Sie die Definitionsmenge von f ' an.

$$\left[\text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \text{ für } x > 0 \text{ und } x \neq 1\right]$$

Geben Sie die Monotoniebereiche von f an, und weisen Sie nach, daß der Graph G_f genau einen Extrempunkt hat.

6 c) Berechnen Sie die Funktionswerte von f an den Stellen $\frac{1}{2}$, 2 und 3, und zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.
(Längeneinheit 2 cm; Ursprung in Blattmitte)

2. Wir betrachten nun die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-0,5}^{x} f(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_F =]-1; 1[$.

3 a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals, daß F in D_F differenzierbar ist und genau eine Nullstelle aufweist.

8 b) Geben Sie eine integralfreie Darstellung von F(x) an.

3. Nun wird die Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{2} \arctan f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge D_h betrachtet. Der zu h gehörende Graph sei G_h.

4 a) Bestimmen Sie D_h, und untersuchen Sie G_h auf Symmetrie. Geben Sie das Verhalten von h(x) an den Rändern von D_h an.

3 b) Bestimmen Sie ohne Berechnung der Ableitung die Monotoniebereiche der Funktion h, ihr relatives Extremum und ihre Wertemenge W_h.

BE

8 c) Zeigen Sie, daß gilt:

$$h(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{für } 0 < x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan x & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Ermitteln Sie das Verhalten von h'(x) in der Umgebung von 0 und von 1.

5 d) Zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse den Graphen G_h in das Koordinatensystem von Aufgabe 1c.

50