BE

L 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

1. Gegeben ist die Schar reeller Funktionen $f_k\colon x \mapsto \dfrac{2k}{ke^x+1}$ mit $k > 0$ und maximaler Definitionsmenge D_k. Der zu f_k gehörende Graph sei G_k.

4 a) Bestimmen Sie D_k und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge. Untersuchen Sie G_k auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

4 b) Untersuchen Sie f_k auf Monotonie, und geben Sie die Wertemenge W_k an.

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f_k'(x) = \frac{-2k^2e^x}{\left(ke^x+1\right)^2}\right]$$

9 c) Begründen Sie, daß folgende Ungleichung gilt: $0 < f_k(x) < 2e^{-x}$.
Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Ungleichung die von k unabhängige Menge aller Punkte $(x|y)$ der Ebene, durch die Scharkurven verlaufen.
Berechnen Sie auch die Grenzwerte $a(x) = \lim\limits_{k\to 0} f_k(x)$ und $b(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$.

5 d) Begründen Sie, daß jede Funktion f_k in D_k umkehrbar ist, und schreiben Sie den Term der Umkehrfunktion in der Form $f_k^{-1}(x)$. Geben Sie für f_k^{-1} auch die Definitionsmenge und die Wertemenge an.

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f_k^{-1}(x) = \ln\frac{2k-x}{kx}\right]$$

8 e) Der Punkt $Q_k(k\,|\,-\ln k)$ ist Symmetriepunkt des Graphen von f_k^{-1}.
Weisen Sie dies nach, und geben Sie den Symmetriepunkt P_k von G_k an.
Die Symmetriepunkte P_k liegen auf einer Kurve c. Berechnen Sie deren Gleichung.