

G 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{x^2 - k}{x + 1}$ mit

$D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $k \in \mathbb{R}$.

Ihre Graphen seien mit G_k bezeichnet.

- 5 1. a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar, und bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von k . Achten Sie dabei auf die Definitionsmenge der Funktionen.
- 4 b) Für welchen Wert von k ist f_k in die Stelle $x = -1$ stetig fortsetzbar? Bestimmen Sie für diesen Fall $\lim_{x \rightarrow -1} f_k(x)$.
- 1 c) Wo schneiden die Graphen der Schar die y -Achse?
- 4 2. a) Zeigen Sie, daß die Gerade $g: y = x - 1$ für alle Graphen der Schar mit $k \neq 1$ Asymptote ist. Welche Bedeutung hat die Gerade $h: x = -1$ für die Graphen G_k mit $k \neq 1$?
- 3 b) Untersuchen Sie, ob die Graphen der Schar für $k \neq 1$ mit der Asymptote g gemeinsame Punkte besitzen.
- 2 3. a) Zeigen Sie, daß für die 1. Ableitung von f_k gilt: $f'_k(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{(x + 1)^2}$
- 7 b) Untersuchen Sie für die Fälle $k = 0$, $k = 1$ und $k = 4$, ob die Graphen G_k Extrempunkte besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls Art und Lage.
- 8 4. Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ die Graphen G_0 , G_1 und G_4 in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm). Tragen Sie auch die Geraden g und h (vgl. Teilaufgabe 2a) ein.
- 6 5. Berechnen Sie den Inhalt I des Flächenstücks, das von den Graphen G_0 und G_4 sowie den Geraden $x = 0$ und $x = e - 1$ begrenzt wird.