BE

L 3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind das Büschel der Ebenen $E_k: kx_1 - kx_2 + x_3 = 8,\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, und der Punkt $A\,(12|12|8)$ gegeben.

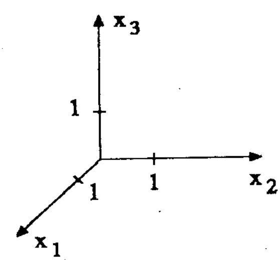
1 1. a) Zeigen Sie: Der Punkt A gehört allen Büschelebenen an.

3 b) S_{ik} sei der Schnittpunkt der x_i-Achse ($i = 1, 2, 3$) mit der Ebene E_k. Bestimmen Sie die Koordinaten der drei Punkte S_{ik}.

4 c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an, der sich die Ebenen E_k für $|k| \to \infty$ nähern.

3 d) Weisen Sie nach, daß es zu jeder Ebene E_k in dem Ebenenbüschel eine Ebene E_{k^*} gibt, die auf E_k senkrecht steht. Welcher Zusammenhang muß dazu zwischen k^* und k bestehen?

4 e) Zeichnen Sie nach nebenstehendem Muster ein Schrägbild des Koordinatensystems. Tragen Sie für die Ebenen E_1 und E_2 die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen ein. Zeichnen Sie auch den Punkt A ein.



6 f) In den bisherigen Untersuchungen ergab sich ein weiterer, von A verschiedener Punkt, den die Ebenen E_k gemeinsam haben. Um welchen Punkt handelt es sich?
Zeigen Sie, daß die Punkte S_{ik} für $i = 1, 2, 3$ und A ein Trapez bilden. Zeichnen Sie diese Trapeze für $k = 1$ und $k = 2$ ein.

3 2. a) Der Ursprung O und die Punkte S_{ik} ($i = 1, 2, 3$) bestimmen jeweils eine Pyramide P_k. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide in Abhängigkeit von k.

6 b) $M_k\,(m_k|-m_k|4)$ ist der Mittelpunkt der Kugel, auf der die vier Ecken der Pyramide P_k liegen. Bestimmen Sie m_k und den Kugelradius r_k.

30