BE

## II.

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: \; x \mapsto f_a(x) = \arctan\left(1 - \frac{2}{ax}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

Der Graph der Funktion $f_a$ wird mit $G_{f_a}$ bezeichnet.

5 1. a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $D_{f_a}$ und die Nullstellen der Scharfunktionen $f_a$. Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen, wenn x gegen die Grenzen von $D_{f_a}$ strebt.

8 b) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Extrempunkte und die Wendepunkte der Graphen $G_{f_a}$ in Abhängigkeit von a. Stellen Sie eine Gleichung für die Schar der Wendetangenten $t_a$ auf.

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } f_a'(x) = \frac{a}{a^2x^2 - 2ax + 2}\right]$$

3 c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen $f_a$.

3 d) Die Tangenten an die Graphen streben bei links- bzw. rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke bestimmten Grenzlagen zu. Geben Sie die entsprechenden Geradengleichungen an.

6 e) Berechnen Sie die Funktionswerte $f_5(-2)$ und $f_5(2)$. Zeichnen Sie im Bereich $-2 \leqq x \leqq 2$ den Graphen $G_{f_5}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat; Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte; Längeneinheit 5 cm).

2. Nun werden die Funktionen

$$g_a: \; x \mapsto \int_{\frac{2}{a}}^{x} \frac{a}{(at-1)^2+1}\,dt \;, \quad x \geqq 0 \,, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

betrachtet.

5 a) Berechnen Sie eine integralfreie Darstellung von $g_a(x)$ mit Hilfe der Substitutionsmethode.

$$\left[\text{Ergebnis: } g_a(x) = \arctan(ax-1) - \frac{\pi}{4}\right]$$

5 b) Zeigen Sie, daß $g_a$ und $f_a$ in $\mathbb{R}^+$ übereinstimmen.

Fortsetzung nächste Seite!

BE

8 c) Begründen Sie, daß $g_a$ umkehrbar ist. Berechnen Sie den Term $g_a^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von $g_a$, und zeichnen Sie den Graphen von $g_5^{-1}$ in das bereits angelegte Koordinatensystem.

7 3. Berechnen Sie den Inhalt des im 4. Quadranten liegenden Flächenstücks, das von den Koordinatenachsen und dem Graphen $G_{f_a}$ begrenzt wird.

Hinweis: Verwenden Sie die in Teilaufgabe 2 erkannten Zusammenhänge.

50