BE

L 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \begin{cases} 4\cdot(1-x)\cdot e^{x-1} & \text{für } x \leqq 1 \\ -\dfrac{4\cdot \ln x}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$.

Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

3 1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an, und bestimmen Sie das Verhalten von f (x) für $x \to \pm\infty$.

11 b) Ermitteln Sie die 1. Ableitung von f. Untersuchen Sie insbesondere, ob diese Ableitung auch an der Stelle x = 1 existiert.

$$\left[\text{Teilergebnis: } f'\colon x \mapsto \begin{cases} -4x\cdot e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 4x^{-2}\cdot(\ln x - 1) & \text{für } x > 1 \end{cases}\right]$$

Berechnen Sie die 2. Ableitung von f für $x \neq 1$, und bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert der 2. Ableitung an der Stelle x = 1.

9 c) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte sowie die Wendepunkte des Graphen G_f. Prüfen Sie, ob für x = 1 ein Wendepunkt vorliegt.

7 d) Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-3 \leqq x \leqq 5$ unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat; Längeneinheit 2 cm). Tragen Sie auch die Tangente bei x = 1 ein.

2. Nun wird die Funktion $g\colon x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ mit $D_g = \mathbb{R}$ betrachtet.

7 a) Zeigen Sie ohne Ausführung der Integration, daß g genau eine Nullstelle hat, und bestimmen Sie die Abszissen der Extrem- und der Wendepunkte sowie die Art der Extrempunkte des Graphen G_g von g. Begründen Sie Ihre Antworten.

6 b) Ermitteln Sie für $x \leqq 1$ eine integralfreie Darstellung von g (x).

3 c) Geben Sie den Inhalt A des Flächenstücks an, das für $x \leqq 1$ vom Graphen G_f und der x-Achse begrenzt wird.

4 d) Für $x \geqq e$ gilt: $f(x) \leqq -\dfrac{4}{x}$. Begründen Sie damit, daß das für $x \geqq 1$ vom Graphen G_f und der x-Achse begrenzte Flächenstück keinen endlichen Inhalt hat.

50