BE

L 3. Analytische Geometrie

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die drei Ebenen:

$$E_1:\quad 4x_1 - 3x_2 - r x_3 = 0$$

$$E_2:\quad -x_1 + 7x_2 + r x_3 = 50 \qquad (r \in \mathbb{R})$$

$$E_3:\quad r x_1 \qquad - 4x_3 = 6r$$

und der Punkt A (6|8|0) gegeben.

5 1. Zeigen Sie, daß der Punkt A für jeden Wert von r in allen drei Ebenen liegt. Welche Bedingung muß r erfüllen, damit die drei Ebenen nur diesen Punkt gemeinsam haben?

2. Im folgenden sei $r = 5$.

5 a) Die Ebenen E_1, E_2, E_3 haben im Fall $r = 5$ eine Gerade s gemeinsam. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden s auf. Weisen Sie nach, daß s auf OA senkrecht steht.

[Mögliches Teilergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \sigma \in \mathbb{R}$]

3 b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, bezüglich der die Punkte O und A Spiegelpunkte zueinander sind. Zeigen Sie, daß F und die Gerade s keinen Punkt gemeinsam haben.

7 c) Mit der Strecke [OA] als Basis werden nun gleichschenklige Dreiecke OAP betrachtet, deren Spitzen $P(p_1|p_2|p_3)$ in der Ebene E_2 liegen.
Bestimmen Sie für die Menge h dieser Punkte P eine Gleichung in Parameterform. Bestätigen Sie ferner, daß h parallel zu s liegt.

[Mögliches Teilergebnis: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$]

4 d) Ein spezieller Punkt von h ist P' (1|5,5|2,5). Welche Neigung hat die Ebene des Dreiecks OAP' gegen die x_1x_2-Ebene?

6 e) Begründen Sie, daß unter allen in Teilaufgabe c beschriebenen Dreiecken OAP das Dreieck OAP' minimalen Flächeninhalt hat.

30