

BE

Gegeben ist die Schar der Funktionen  $f_a: x \mapsto \frac{2 \cdot e^x}{a + e^{2x}}$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $D = \mathbb{R}$ ; die Graphen werden mit  $G_a$  bezeichnet.

5 1. a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehung:

$$f_a(\ln\sqrt{a} + d) = f_a(\ln\sqrt{a} - d) \text{ mit } d \in \mathbb{R}.$$

Welche geometrische Bedeutung hat diese Beziehung für die Graphen  $G_a$ ?

8 b) Untersuchen Sie das Verhalten von  $f_a(x)$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Geben Sie die Monotoniebereiche sowie Lage und Art des Extrempunktes an. Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte aller Graphen  $G_a$ .

8 c) Berechnen Sie die Funktionswerte  $f_1(1)$ ,  $f_1(2)$  und  $f_{0,25}(0)$ .

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen  $G_1$ ,  $G_{0,25}$  sowie die Ortskurve der Extrempunkte (Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte; Längeneinheit 2 cm).

2. Gegeben ist die Integralfunktion  $F: x \mapsto \int_0^x f_1(t) dt$  mit  $D_F = \mathbb{R}$ ;

der Graph von  $F$  wird mit  $G_F$  bezeichnet.

Die Teilaufgaben 2a, 2b und 2c sind ohne Berechnung des Integrals zu bearbeiten.

5 a) Weisen Sie nach, daß  $F$  streng monoton steigt und daß der Graph  $G_F$  zum Ursprung symmetrisch ist.

4 b) Zeigen Sie, daß  $G_F$  genau einen Wendepunkt  $W$  hat, und geben Sie seine Koordinaten an. Ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente.

7 c) Für  $b > 0$  gilt:  $F(b) > b \cdot f_1(b)$ .

Begründen Sie diese Aussage anschaulich mit Hilfe einer Flächenbetrachtung. Zeigen Sie, daß sich die Graphen  $G_F$  und  $G_1$  im Bereich  $0 < x < 1$  genau einmal schneiden.

5 d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode eine integralfreie Darstellung von  $F(x)$ .

$$\left[ \text{Zur Kontrolle: } F(x) = 2 \cdot \arctan e^x - \frac{\pi}{2} \right]$$

3 e) Berechnen Sie den Inhalt der sich beidseitig ins Unendliche erstreckenden Fläche zwischen  $G_1$  und der  $x$ -Achse.

2 f) Bestimmen Sie  $x_0$  so, daß  $F(x_0) = 1$  ist.

3 g) Skizzieren Sie nun unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse den Graphen  $G_F$  in das bereits angelegte Koordinatensystem.

50