L 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE

Gegeben ist die Funktionenschar $f_c:\ x \mapsto \dfrac{x^2 + c - 4}{x + 2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $c \in \mathbb{R}^+$.

5 1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Koordinatenachsen, und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an. Führen Sie, falls nötig, Fallunterscheidungen durch.

7 b) Bestimmen Sie die Extrema der Scharfunktionen f_c, und ermitteln Sie die Ortskurve der Tiefpunkte aller Scharkurven.

$$\left[\text{Teilergebnis: } f_c'(x) = 1 - \frac{c}{(x+2)^2}\right]$$

6 c) Zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse im Bereich $-6 \leq x \leq 4$ die Asymptoten, den Graphen der Funktion f_1 und die Ortskurve der Tiefpunkte (Hochformat, Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte, Längeneinheit 1 cm).

5 d) Weisen Sie nach, daß jede Scharkurve punktsymmetrisch ist.

2. Betrachtet wird nun die Funktion $F:\ x \mapsto \int_0^x f_1(t)\,dt$, $x > -2$.

3 a) Geben Sie, ohne die Integration auszuführen, die Abszissen der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von F an.

4 b) Untersuchen Sie, ebenfalls ohne Ausführung der Integration, das Monotonieverhalten von F in $\mathbb{R}^+$, und begründen Sie, warum F dort genau eine Nullstelle x_0 besitzt.

In den Teilaufgaben 2c und 2d sind Rechenergebnisse jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

5 c) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F(x)$. Berechnen Sie $F(-\sqrt{3})$ und $F(\sqrt{3})$, und geben Sie den Inhalt A des von der x-Achse und dem Graphen von f_1 eingeschlossenen Flächenstücks an.

$$\left[\text{Teilergebnis: } F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2) - \ln 2\right]$$

8 d) Zur genaueren Bestimmung von x_0 (Teilaufgabe 2b) wird nun die Funktion $g:\ x \mapsto x - \sqrt{3}$, $x \in \mathbb{R}$, eingeführt. Zeigen Sie, daß für $x \geq \sqrt{3}$ gilt: $g(x) \geq f_1(x)$.

Bestimmen Sie die reelle Zahl $a > \sqrt{3}$ so, daß $\int_0^{\sqrt{3}} f_1(t)dt + \int_{\sqrt{3}}^{a} g(t)dt = 0$ gilt.

Entscheiden Sie, ob $x_0 \leq a$ oder $x_0 \geq a$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie $F(2\sqrt{3})$, und geben Sie dann ohne weitere Rechnung mit Hilfe der gefundenen Ergebnisse ein möglichst kleines Intervall an, in dem x_0 liegt.

7 e) Untersuchen Sie das Verhalten von F am linken Rand des Definitionsbereichs, und skizzieren Sie den Graphen von F unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1c.

50