L 3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem K sind die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$ sowie der Punkt $A(4 \mid 9{,}5 \mid 8)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

gegeben.

5 1. a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E und den Fußpunkt A_0 des Lots von A auf E.

[Teilergebnis: $S(2 \mid 1{,}5 \mid 2)$]

3 b) Die Gerade h sei die senkrechte Projektion von g auf E. Geben Sie eine Gleichung von h an.

$$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

3 c) Weisen Sie nach, daß die Gerade

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

in der Ebene E liegt, senkrecht auf h steht und den in Teilaufgabe 1a bestimmten Punkt S enthält.

2 d) Legen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen zwischen E, g, h und k hervorgehen. Die Zeichnung ist im folgenden entsprechend zu ergänzen.

2. In der Ebene E wird nun ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem K' eingeführt mit dem Punkt $S(2 \mid 1{,}5 \mid 2)$ als Ursprung und auf den Betrag 1 normierten Richtungsvektoren von h bzw. k als erstem bzw. zweitem Basisvektor.

8 a) Geben Sie die Koordinaten q_1', q_2' des in E liegenden Punktes $Q(2 \mid 0{,}5 \mid 4)$ in dem neuen System K' an.

[Mögliches Ergebnis: $q_1' = \sqrt{2}$, $q_2' = \sqrt{3}$]

5 b) Berechnen Sie unter Verwendung von Vektoren aus K' den Winkel φ, den die Geraden h und SQ bilden.

4 c) Die Parallele zu h durch Q sei p. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, daß der Abstand der windschiefen Geraden p und g gleich $\sqrt{3}$ ist.

30

ML.5