II.

BE

Gegeben sind die Funktionen $h\colon x \mapsto \dfrac{x}{4-x}$ und $f\colon x \mapsto \ln\dfrac{x}{4-x}$ in ihren maximalen Definitionsbereichen D_h und D_f. Ihre Graphen werden mit G_h bzw. G_f bezeichnet.

4 1. a) Geben Sie D_h und die Nullstelle von h an. Untersuchen Sie das Verhalten von h in der Umgebung der Definitionslücke sowie für $x \to \pm\infty$.

4 b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion h.

4 c) Skizzieren Sie mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-4 \leq x \leq 8$ (Längeneinheit 1 cm).

4 2. a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f und die Nullstelle von f.

3 b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

4 c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f, und zeigen Sie, daß f streng monoton zunimmt.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{4}{x\cdot(4-x)}$]

3 d) Weisen Sie nach, daß der Graph G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g\colon x \mapsto x-2$ Tangente an G_f im Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist.

4 e) Berechnen Sie $f(1)$, $f(1{,}5)$ und $f(3)$. Skizzieren Sie in D_f die Graphen G_f und G_g in ein neues Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm).

4 3. a) Zeigen Sie, daß die Funktion $F\colon x \mapsto x\cdot\ln\dfrac{x}{4-x} + 4\ln(4-x)$ in $D_F = D_f$ eine Stammfunktion von f ist.

6 b) Die Graphen G_f und G_g besitzen nur einen gemeinsamen Punkt (Nachweis nicht erforderlich). Bestätigen Sie, daß die Fläche, die von der Geraden $x = 1$ sowie den Graphen G_f und G_g (siehe 2d) begrenzt wird, den Inhalt $-\frac{1}{2} + \ln\frac{27}{16}$ hat.

40