

IV.

Zu jedem Zifferschloß gehört eine "Geheimzahl", mit der das Schloß geöffnet werden kann. Im folgenden werden als Geheimzahlen vierstellige Zahlen verwendet, die aus den Ziffern 1 bis einschließlich 7 gebildet werden können. Dabei wird die Produktion so gesteuert, daß alle möglichen Geheimzahlen gleichwahrscheinlich sind.

BE
5
5
3
5
6
3
6
7
40

1. a) Berechnen Sie den Anteil aller Geheimzahlen, die genau zwei gleiche Ziffern enthalten. Bei welchem Bruchteil dieser Geheimzahlen sind die übereinstimmenden Ziffern benachbart?
b) Sind die Ereignisse $Z :=$ "Die Geheimzahl enthält genau zwei übereinstimmende Ziffern" und $U :=$ "Die Geheimzahl besteht nur aus ungeraden Ziffern" unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Element aus U , wenn man nur aus den Elementen von Z zufällig auswählt?
2. Aus einer Tagesproduktion werden 200 Zifferschlösser zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter diesen 200 Schlössern mindestens eines, das sich mit der Geheimzahl 1234 öffnen läßt? Verwenden Sie die Poisson-Näherung.
3. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Einsen an, die in einer Geheimzahl vorkommen.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf 0,1% genau
b) Man wählt nun 100 Zifferschlösser zufällig aus. X_i ist die Anzahl der Einsen in der Geheimzahl des i -ten Schlosses. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
c) Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Mindestwahrscheinlichkeit dafür ab, daß der Erwartungswert von Y um weniger als 15 verfehlt wird.
4. Um einen Hinweis auf die Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Geheimzahlen zu erhalten, werden im Laufe eines Jahres 20 000 Schlösser überprüft. Es wird folgender Test durchgeführt: Man bestimmt die Anzahl T der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten. Liegt T im Intervall $[7100; 7300]$, dann hält man an der Nullhypothese $H_0 :=$ "Der Anteil der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten, beträgt 36,0%" fest; andernfalls lehnt man sie ab.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit lehnt man die Nullhypothese irrtümlich ab? Verwenden Sie dabei die Normalverteilung.