II.

BE Gegeben ist die Funktion $f\colon\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}$ mit der maximalen Definitionsmenge D_f.

5 1. a) Weisen Sie nach, daß $D_f = [2;4[$ ist, und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

5 b) Zeigen Sie, daß gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{(4-x)\sqrt{(4-x)(x-2)}}$.

Geben Sie $D_{f'}$ an, und untersuchen Sie das Verhalten von f' an den Rändern von $D_{f'}$.

3 c) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Wertemenge von f.

5 2. a) Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion f^{-1} existiert und durch den Term

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x^2+2}{1+x^2}$ beschrieben wird.

Geben Sie die Definitions- und die Wertemenge von f^{-1} an.

7 b) Berechnen Sie $f(3)$, und skizzieren Sie die Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm).

8 c) Es existiert genau eine Stelle $a \in D_f$, an der sich G_f und $G_{f^{-1}}$ schneiden (Nachweis und Berechnung von a nicht erforderlich).

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f, $G_{f^{-1}}$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

3. Nun wird die Funktion $g\colon\ x \mapsto \arctan f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge D_g betrachtet.

5 a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von Teilaufgabe 1 die Definitionsmengen D_g, $D_{g'}$ und die Wertemenge W_g sowie das Verhalten von g' am linken Rand von $D_{g'}$.

6 b) Zeigen Sie, daß der Graph G_g von g in $]2;4[$ punktsymmetrisch zu $S(3\,|\,\frac{\pi}{4})$ ist. Zum Nachweis darf die Formel

$$\arctan z + \arctan \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} \qquad (z > 0)$$

benützt werden.

6 c) Skizzieren Sie den Graphen G_g unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in das bereits angelegte Koordinatensystem. Geben Sie ohne Integration den Inhalt des Flächenstücks an, das von G_g, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 4$ begrenzt wird, und erläutern Sie Ihre Überlegung.

50