

L 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_a: x \mapsto x^2 - \ln(x^2 + a^2) \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ \text{ und } D = \mathbb{R}.$$

5

1. a) Untersuchen Sie die Graphen G_a von f_a auf Symmetrie. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $x \rightarrow \pm \infty$.

12

b) Zeigen Sie, daß für die Ableitung gilt: $f'_a(x) = \frac{2x(x^2 + a^2 - 1)}{x^2 + a^2}$.

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Scharfunktionen in Abhängigkeit von a und bestimmen Sie damit Lage und Art der Extrema. Folgern Sie, daß jede Scharfunktion einen minimalen Funktionswert m_a besitzt, und berechnen Sie diesen Wert.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Teilergebnis: } m_a = 1 - a^2 \text{ für } a < 1 \\ m_a = -2 \ln a \text{ für } a \geq 1 \end{array} \right]$$

6

c) Welche Scharkurven G_a haben mit der x -Achse Punkte gemeinsam, und wie viele derartige Punkte gibt es dann? Begründen Sie Ihre Antwort.

3

d) Weisen Sie nach, daß für $a_1 < a_2$ der Graph G_{a_1} stets oberhalb des Graphen G_{a_2} liegt.

7

e) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_{0,5}(2)$ die Graphen G_2 und $G_{0,5}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem mit Längeneinheit 2 cm ein.

8

2. a) Bestimmen Sie unter Verwendung partieller Integration eine Stammfunktion F_a von f_a .

$$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - x \ln(x^2 + a^2) - 2a \arctan \frac{x}{a} \right]$$

9

b) Berechnen Sie den Inhalt A des zwischen den Graphen G_2 und $G_{0,5}$ liegenden Flächenstücks.

Hinweis: Unter Verwendung der bekannten Abschätzung $\ln z \leq z - 1$ für $z \in \mathbb{R}^+$ können Sie zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \frac{x^2 + a_2^2}{x^2 + a_1^2} = 0.$$

50