II.

BE

Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}$ die Schar von Funktionen $f_a:\ x \mapsto \frac{x^2 + ax}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

1. Wir setzen zunächst voraus, daß $a \neq 1$ ist.

3 a) Bestimmen Sie D und – in Abhängigkeit von a – die Nullstellen von f_a

b) Zeigen Sie, daß in D gilt: $f_a(x) = x + (a-1) - \frac{a-1}{x+1}$.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_a an.

8 c) Berechnen Sie die Ableitung $f_a'(x)$.
Zeigen Sie, daß jeder Graph G_a entweder zwei Stellen oder keine Stell mit horizontaler Tangente besitzt (Fallunterscheidung bezüglich a).

5 d) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $a = 3$ den Graphen G_3 im Bereich $[-5; 5]$. Zeichnen Sie auch die dazugehörige Asymptoten ein (Längeneinheit 1 cm).

4 2. Nun wird für $a = 1$ die Funktion f_1 betrachtet.
Vereinfachen Sie den Funktionsterm $f_1(x)$, und zeichnen Sie den Graphen G_1 in ein neues Koordinatensystem ein.

3. Gegeben ist für $x > -1$ die Funktion $F:\ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x+1) + 5$.

4 a) Weisen Sie nach, daß F eine Stammfunktion von f_3 für $x > -1$ ist.

8 b) Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ der im ersten Quadranten liegenden endlichen Fläche, die von G_3, der dazugehörigen schrägen Asymptote sowie den Geraden $x = 0$ und $x = b$ mit $b > 0$ begrenzt wird (siehe Teilaufgabe 1d).

3 c) Untersuchen Sie das Verhalten von $A(b)$ für $b \to \infty$.

40