G 1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)$ mit maximaler Definitionsmenge D_h. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.
Gegeben ist ferner für $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion $f: x \mapsto \ln \frac{x^2}{4}$.
Ihr Graph ist G_f.

1. Wir untersuchen zuerst die Funktion h.

4 a) Ermitteln Sie D_h und untersuchen Sie G_h auf Symmetrie sowie auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse.

4 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_h.

4 c) Berechnen Sie h(1), h(2), h(3), h(6), und zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-6 \leqq x \leqq 6$ (Längeneinheit 1 cm).

2. Wir betrachten nun die Funktion f.

3 a) Bestätigen Sie, daß G_f symmetrisch zur y-Achse verläuft, und untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung von $x = 0$.

4 b) Berechnen Sie f(1), f(2), f(3), f(6), und zeichnen Sie G_f in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein.

7 3. Eine Gerade mit der Gleichung $x = a$ schneidet für $a \neq 0$ den Graphen G_h im Punkt A und den Graphen G_f im Punkt B. Zeigen Sie, daß der Term $\ln \frac{a^2+4}{a^2}$ die Entfernung $\overline{AB}$ der beiden Punkte angibt.
Weisen Sie nach, daß für $a \to +\infty$ die Entfernung $\overline{AB}$ gegen Null geht.

4 4. a) Zeigen Sie, daß $F: x \mapsto -2x + x \cdot \ln \frac{x^2}{4}$ mit $x \in D_f$ eine Stammfunktion von f ist.

10 b) In welchen Punkten schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ den Graphen G_f?
Berechnen Sie den Inhalt J der im ersten Quadranten liegenden endlichen Fläche, die von den beiden Koordinatenachsen, von der Geraden $y = 2$ und von G_f begrenzt wird.

40