Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1979
Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in R definierte Funktion *f*: $x \to f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

1. a) Berechnen Sie $f'(x)$. 5
   Begründen Sie die strenge Monotonie von *f* und untersuchen Sie das Verhalten von *f* und f' für $x \to \pm\infty$.

   b) Zeigen Sie: Der Graph der Funktion φ mit dem Definitionsbereich R ist genau dann 5
   symmetrisch zum Punkt $(0|1)$, wenn für jedes $x \in R$ gilt: $\varphi(x) + \varphi(-x) = 2$.
   Weisen Sie nach, daß die Funktion *f* dieser Bedingung genügt.

   c) Berechnen Sie $f'(0)$ und zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen 7
   Ergebnisse
   den Graphen G_f von f im Bereich $|x| \le 4$ (Querformat; Längeneinheit 2 cm).

4

2. a) Weisen Sie nach, dass in R folgende Ungleichung gilt:
   $f(x) < 2 \cdot e^{-x}$.
   Folgern Sie daraus, daß die im 1. Quadranten liegende, von G_f und den Koordinatenachsen begrenzte Fläche einen endlichen Inhalt *J* hat.
   Welche Abschätzung ergibt sich hierbei für *J*?

8

   b) Verifizieren Sie die Umformung $f(x) = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x}$ und berechnen Sie damit den exakten
   Wert des in Teilaufgabe 2a) genannten Flächeninhalts J.

3. Nun werde die Menge der Stammfunktionen zu der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion
   h: $x \to h(x) = f(x) - 1$ betrachtet.

5

   a) Zeigen Sie allein unter Berufung auf die Eigenschaften von *h*, daß der Graph der
   Funktion $H_0 : x \to H_0(x) = \int_0^x h(t)dt$
   symmetrisch zur y-Achse ist und genau ein Maximum hat.
   Was folgt daraus für den Graphen einer beliebigen Stammfunktion von *h*?

3

   b) Berechnen Sie nun die Gleichung derjenigen Stammfunktion *H*, deren Graph den Punkt
   $(0|2)$ enthält.
   [Ergebnis: $H(x) = x - 2\ln(1+e^x) + 2 + \ln 4$]

4

   c) Begründen Sie, daß die Gerade $y = x + 2 + \ln 4$ für $x \to -\infty$ Asymptote des Graphen
   von *H* ist.
   Wie lautet auf Grund der Symmetrie die Gleichung der Asymptote für $x \to +\infty$?
   Skizzieren Sie nun den Graphen G_H von *H* in das bereits angelegte Koordinatensystem.

4. Die Graphen G_f und G_H werden von einer Geraden $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$ in den Punkten P bzw. Q geschnitten.

a) Für welchen Wert k_0 sind die Tangenten in P und Q zueinander parallel? 6
(Hinweis für die Berechnung: Substitution $e^k = u$.)

b) Die Zeichnung läßt erkennen, daß es für die Streckenlänge $\overline{PQ}$ ein relatives Maximum gibt (Nachweis nicht verlangt). Zeigen Sie, daß dieses Maximum nur an der Stelle $x = k_0$ auftreten kann. 3