Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1978
Infinitesimalrechnung I (1/2)

Der Graph G_f einer Funktion f besteht aus den Punkten $P(x|y)$ mit $x = \ln t$ und $y = \ln(1+\frac{1}{t})$.
Dabei durchläuft der reelle Parameter t den größtmöglichen Bereich B.

1. a) Geben Sie B an und schließen Sie hieraus unmittelbar auf den Definitionsbereich ID_f und den Wertebereich W_f der Funktion f. 5

   b) Geben Sie die Koordinaten der zu $t \in \{1,2,3,4,5,6\}$ gehörenden Kurvenpunkte an und tragen Sie diese Punkte in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 5 cm; Querformat). 5

   c) Stellen Sie nun die Funktionsgleichung $y = f_{(x)}$ auf, zeigen Sie, daß der Graph G_f monoton fällt und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten. 3
   [Ergebnis: $f_{(x)} = \ln(1+e^{-x})$]

   d) Weisen Sie nach, daß die beiden Geraden mit den Gleichungen $y = 0$ und $y = -x$ Asymptoten von G_f sind. Skizzieren Sie nun unter Verwendung aller Ergebnisse den Graphen G_f. 8

2. Der Graph G_f und die positiven Halbachsen des Koordinatensystems begrenzen eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche F, von der nun untersucht werden soll, ob sie endlichen Inhalt besitzt.

   a) Betrachten Sie zunächst jene Teilfläche von F, die zwischen den zu $x = 0$ und $x = \ln n$, $n \in \mathrm{N}$ und $n \neq 1$, gehörende Ordinate liegt. 12
   Welches Integral gibt den Inhalt J_n dieser Teilfläche an?
   Geben Sie nun für dieses Integral eine Obersumme S_n an, indem Sie im Intervall $[0;\ln]$ die Teilungspunkte $\ln 2, \ln 3, ..., \ln(n-1)$ einführen und die entsprechenden Flächenteile durch umbeschriebene Rechtecke ersetzen. (Zeichnen Sie einige dieser Rechtecke in die Skizze ein!)

   Hinweis: Das Ergebnis kann in der Form $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln \frac{k+1}{k}\right)^2$ geschrieben werden.

   b) Erläutern Sie kurz anhand einer Nebenskizze die folgenden Ungleichungen: 7
   $\ln x \leq x - 1$ für $x \in R^+$.
   Verwenden Sie diese Ungleichung, um die in Teilaufgabe 2a gefundene Obersumme S_n durch $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right)^2$ abzuschätzen.

   c) Für $x > 1$ gilt $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$. Begründen Sie diese Beziehung 7
   Vergröbern Sie mit Hilfe dieser Ungleichung die in Teilaufgabe 2b gewonnene Abschätzung für S_n.

   d) Zeigen Sie nun mehr, daß die oben beschriebene Fläche F einen endlichen Inhalt J besitzt, für den die Abschätzung $J < 2$ gilt. 3

Leistungskurs Mathematik: Abiturprüfung 1978
Infinitesimalrechnung I (2/2)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Schar der Funktionen

$$f_k:\ x \to f_k\left(x\right) = \begin{cases} x^{-k} \cdot e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \quad \text{mit } k \in N_0$$

Jede dieser Funktionen ist auch bei $x = 0$ stetig (Nachweis nicht verlangt!).

1. a) Beweisen Sie, daß die zugehörigen Graphen G_k für gerades k achsensymetrisch und für ungerades k punktsymetrisch sind. 3

   b) berechnen Sie $f_k^{'}(0)$ unmittelbar aus der Definition der Ableitung 4

   c) Zeigen Sie, daß für $x > 0$ gilt: $f_k^{'}(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} \cdot \left(1 - kx\right)$ und geben Sie ohne Benützung der 2. Ableitung die Extrempunkte von G_k in R an. 10

   d) Weisen Sie nach, daß alle Graphen G_k für $x = 1$ einen gemeinsamen Punkt haben. 1

   e) Berechen Sie für die Funktionen f_0 und f_2 die Grenzwerte für $x \to \infty$ sowie die Ableitungswerte an der Stelle $x = 1$. 4

   f) Skizzieren Sie die Graphen G_0 und G_2 unter Berücksichtigung der bisher gewonnenen Ergebnisse (Längeneinheit 5 cm) 11

2. Nun wird die ebenfalls in R definierte Integralfunktion

   F: $\quad x \to F\left(x\right)\int_0^x f_2(t)dt$ betrachtet.

   a) Welches Symmetrieverhalten zeigt der zugehörige Graph G_F ? Begründen Sie kurz Ihre Antwort. 4

   b) Geben Sie für $x > 0$ mit Hilfe der Substitutionsmethode eine integralfreie Darstellung von $F(x)$ an. Begründen Sie die Zulässigkeit des Verfahrens. 7

   c) Ist F mit F_0 identisch? Wie lautet der Funktionsterm $F(x)$ für $x < 0$? 3

   d) Welchen Wert hat $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$? Bestimmen Sie jene Stelle x_0, für die gilt: $F\left(x_0\right) = \dfrac{1}{2}$, und geben Sie eine geometrische Deutung dieses Ergebnisses. 3