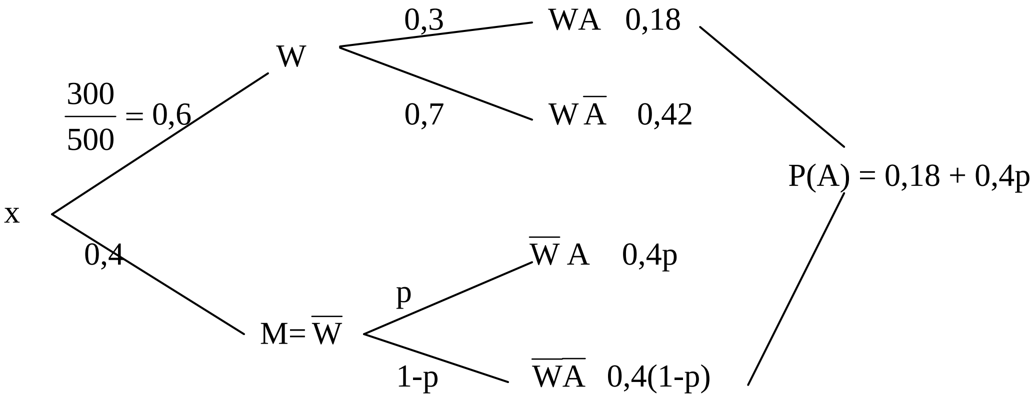
Musterlösung
Abitur 2001 Leistungskurs Mathematik
IV Wahrscheinlichkeitsrechung / Statistik

Ein Fitness-Studio hat 300 weibliche und 200 männliche Mitglieder.

1. 30 % der weiblichen Mitglieder sind älter als 50 Jahre. Ein Viertel der über 50-jährigen Mitglieder sind Männer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein männliches Mitglied älter als 50 Jahre?

W: „weibliches Mitglied“ und A: „älter als50 Jahre“



$$P_A(\overline{W}) = \frac{1}{4} = \frac{P(\overline{W} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}4p}{0{,}18 + 0{,}4p} \implies 0{,}18 + 0{,}4p = 1{,}6p \implies p = 0{,}15$$

2. In jeder Woche verlost der Inhaber des Fitness-Studios eine Wochenendreise unter den Mitgliedern.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen bei den nächsten 50 Verlosungen mehr Frauen als Männer?

   $P_{0,6}^{50}(Z > 25) = 1 - P_{0,6}^{50}(Z \le 25) = 1 - 0{,}09781 = 90{,}2\%$ (Tafelwerk)

   b) Wie oft muss die Verlosung mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % wenigstens ein männliches Mitglied eine Wochenendreise gewinnt?

   P = 0,4 ==> $1 - 0{,}6^n > 0{,}999$ ==>

   $$n > \frac{\ln(1 - 0{,}999)}{\ln 0{,}6} \implies n > 13{,}5 \implies n \ge 14$$

3. In einer Illustrierten wird behauptet, dass mindestens 20 % der Besucher von Fitness-Studios Mittel zu sich nehmen, mit denen sie gegen geltende Doping-Bestimmungen verstoßen würden. Spontan erklären sich alle Mitglieder des Fitness-Studios zu einem Test bereit. 200 Mitglieder werden rein zufällig dazu ausgewählt.
   a) Die Nullhypothese H_0: „Mindestens 20 % nehmen Doping-Mittel“ soll auf dem Signifikanzniveau 1 % getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

   Signifikanztest mit

   Alternative H_1: $p_1 < 0{,}2$ Nullhypothese H_o : $p_0 \ge 0{,}2$

   |------------------------------------| |---------------------------------------|

   0 k k +1 n = 200mal gedopt

   Signifikanzniveua = Fehler 1.Art:

   $P_{0,2}^{200}(Z \le k) \ge 0{,}01$

   Tafelwerk: $k \ge 26$ ==> Annahmebereich fpr $p_0 \ge 0{,}2$: {27, 28, 29, ..., 200}

b) Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese H_0 nicht ablehnen kann, obwohl nur 9 % der Besucher von Fitness-Studios Doping-Mittel verwenden.
Verwenden Sie die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

n=200 ==> $\mu = n*p = 200 * 0{,}09 = 18$

p = 0,09 $\sigma^2 = npq = \cancel{18*0{,}01 = 16{,}39}$ 18*0,91=16,38

Hinweis: $\sigma^2 > 9$, also Normalverteilung als Annäherung möglich

Fehler 2.Art: $P_{0,09}^{200}(Z \geq 27) = 1 - P_{0,09}^{200}(Z \leq 26) = 1 - \Phi\left(\frac{26+{,}5-18}{\sqrt{16{,}39}}\right)$

$= 1 - \Phi(2{,}10) = 1 - 0{,}98214 = 1{,}8\ \%$ (aus Tafelwerk)

4. 12 neue Mitglieder haben sich angemeldet, darunter ein Ehepaar. Sie werden rein zufällig so auf drei verschiedene Übungsgruppen aufgeteilt, dass in die 1. Gruppe 4, in die 2. Gruppe 3 und in die 3. Gruppe 5 der neuen Mitglieder kommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ehepaar zusammen in einer Gruppe?

$|\Omega| = \binom{12}{4} * \binom{8}{3} * \binom{5}{5} = 27.720$ ohne Reihenfolge

$|E| = \binom{2}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{5} + \binom{10}{4}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{5} * \binom{10}{4}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{3} = 7.980$

$==> P(E) = \frac{7980}{27720} = \frac{19}{66 =} 28{,}8\%$

$\text{oder } P(E) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{12}{5}} = \frac{19}{66} = 28{,}8\%$

$\text{oder } P(E) = \frac{4\cdot 3 + 3\cdot 2 + 5\cdot 4}{12\cdot 11} = \frac{38}{132} = \frac{19}{66} = 28{,}8\ \%$ mit Reihefolge

5. Eine Zufallsgröße X hat die folgende Verteilung:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b

a) Wie groß sind die Werte a und b, wenn die Zufallsgröße X den Erwartungswert 1,8 hat?
Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X.

x_i	0	1	2	3	4	5	
$P(X=x_i)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b	
$x_i*P(X=x_i)$	0	0,32	0,70	0,36	4a	5b	==> E(X) = 1,38 +4a+5b
$xi^2 *\ P(X=x_i)$	0	0,32	1,40	1,08	16a	25b	==> $E(X^2)$ = 2,80 + 16a + 25b

I a + b = 1 – (0,11 + 0,32 + 0,35 + 0,12) 0,1 ==> a = 0,1 -b
II 1,38 + 4a + 5b = 1,8 ==> 1,38 + 4(0,1-b) + 5b = 1,8 ==> b = 0,02
und a = 0,08

$==> E(X^2)\ 4{,}58$

$==> Var(X) = 4{,}58 - 1{,}8^2 = 1{,}34 ==> \sigma_X = \sqrt{1{,}34} = 1{,}16$

Das der Zufallsgröße X zugrunde liegende Zufallsexperiment wird 500-mal unabhängig ausgeführt. Wir betrachten die Zufallsgröße $S = \sum_{i=1}^{500} X_i = X_1+X_2+ ... + X_{500}$, wobei die X_i die gleiche Verteilung wie die Zufallsgröße X besitzen.

b) Schätzen Sie mit der Tschebyschow-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Wert von S größer als 850 und kleiner als 950 ist.

(1) E(S) = 500 * E(X) = 900 wegen Unabhängigkeit

Var(S) = 500 * Var(X) = 670

(2) $P(|S - 900| < 50) > 1 - \frac{670}{50^2}$ ==> .... > 73,2 %

c) Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsgröße S nahezu normalverteilt. Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, die in Teilaufgabe 5b mit der Tschebyschow-Ungleichung abgeschätzt wurde.

$P(|S - 900| < 50) = P(|S - 900| \leq 49)$

$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{a + 0{,}5}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{49 + 0{,}5}{\sqrt{670}}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(1{,}91) - 1 = 1 - 0{,}97193 = 94{,}4\ \%$

oder $P(851 \leq X \leq 949) = \Phi\left(\frac{949 + 0{,}5 - 900}{\sqrt{670}}\right) - \Gamma\left(\frac{851 - 0{,}5 - 900}{\sqrt{670}}\right)$

$= \Phi(1{,}91) - \Phi(-1{,}91) = \Phi(1{,}91) - [1 - \Phi(1{,}91)]$

$= 2 \cdot \Phi(1{,}91) - 1 = 1 - 0{,}97193 = 94{,}4\ \%$

Hinweis: statt $\Phi\left(\frac{a + 0{,}5}{\sigma}\right)$ kann auch $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)$ verwendet werden, da keine Binomialverteilung vorliegt.